Departamento de Ingeniería Civil- Universidad de Chile

Capitulo I

Introducción al análisis de los estados de tensiones y de deformaciones

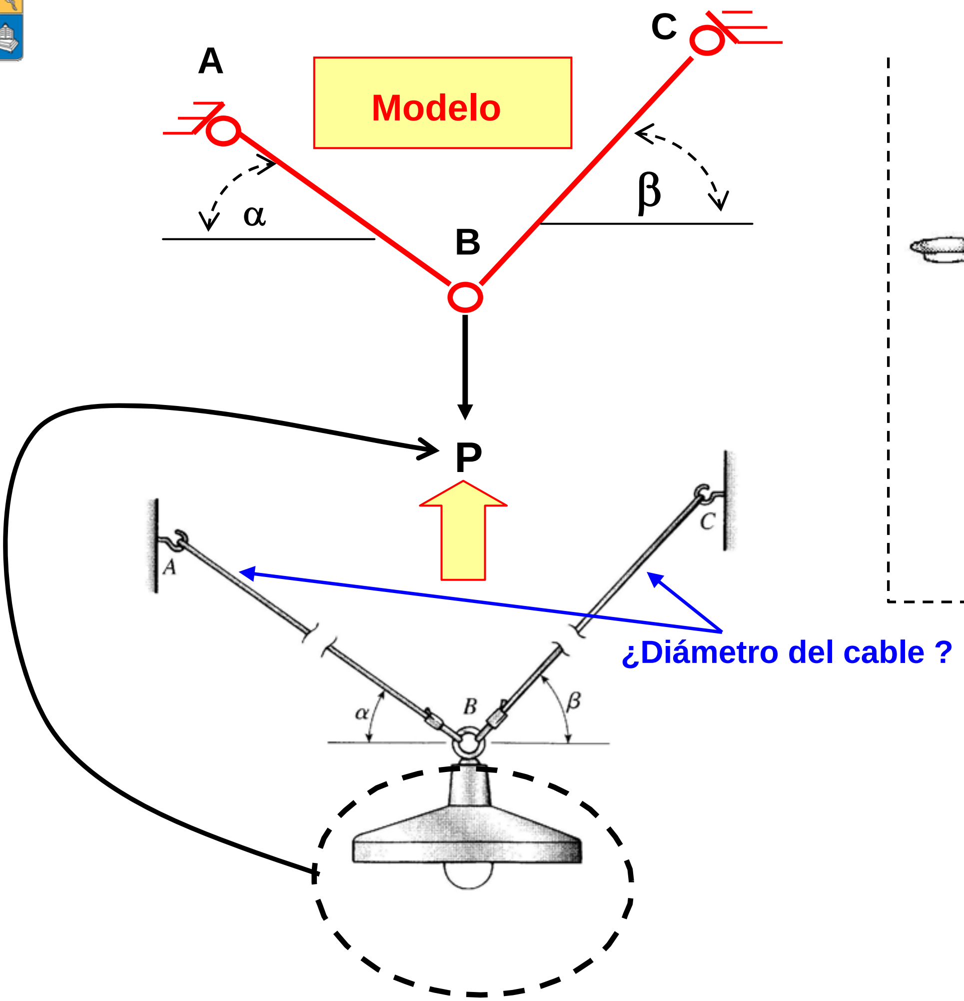
Primavera 2010

OBJETIVO PERSEGUIDO AL CONOCER ESTOS ESTADOS

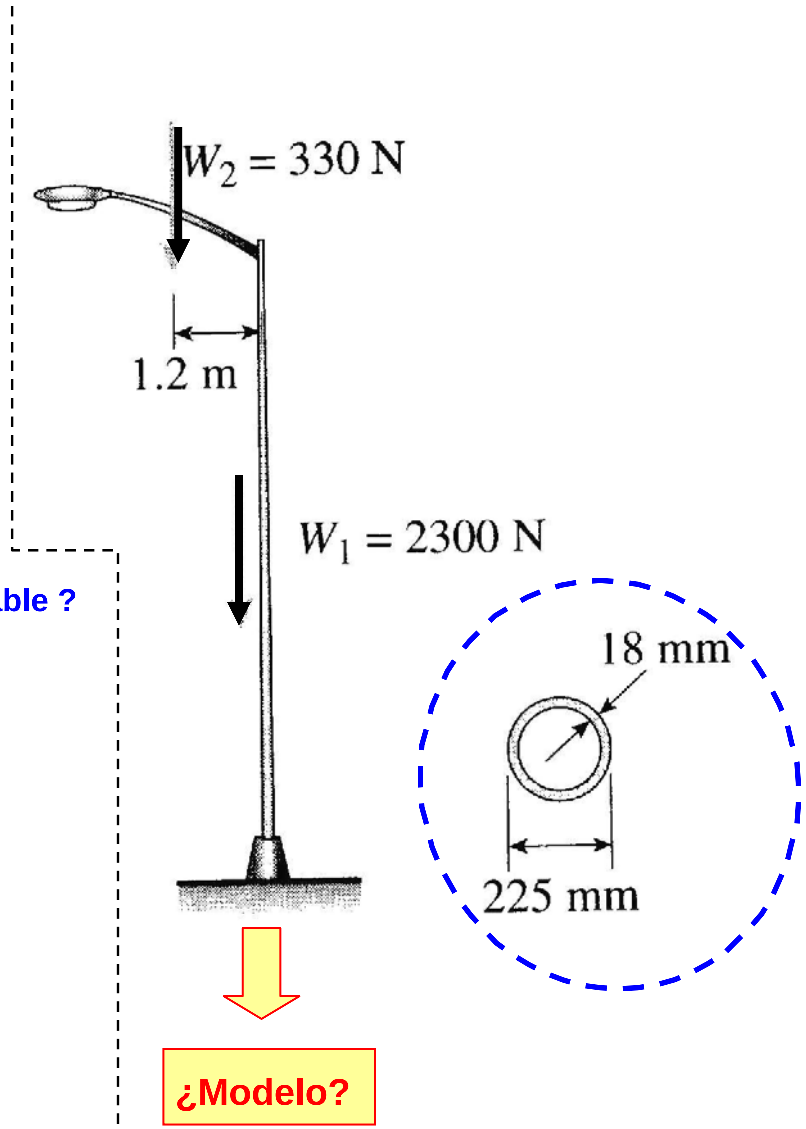
Seleccionar los materiales y establecer las dimensiones **de los elementos (Sólido) que forman una estructura para resistir** ***adecuadamente*** **las acciones externas.** $\Rightarrow$ ***Sin experimentar daño, sin deformarse excesivamente, sin que su configuración inicial se vuelva inestable (pandeo global o local).***

⇩

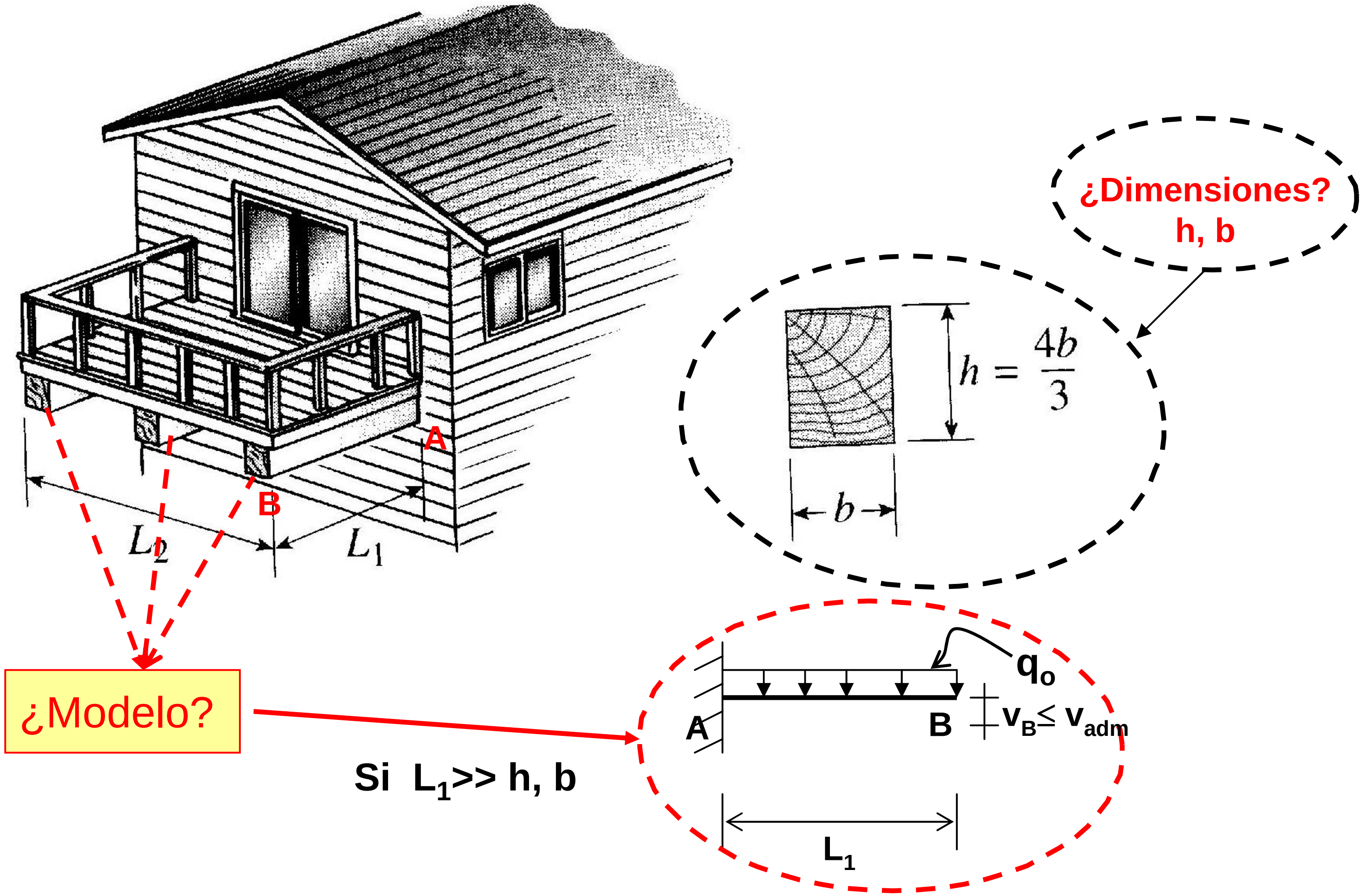
Desarrollar métodos analíticos para calcular las <u>tensiones</u> ($\Rightarrow$ ***Fuerzas internas*****) y <u>deformaciones</u> (**$\Rightarrow$ ***Cambios de dimensiones y de forma*****) considerando las** ***características (propiedades)*** **del sólido.**



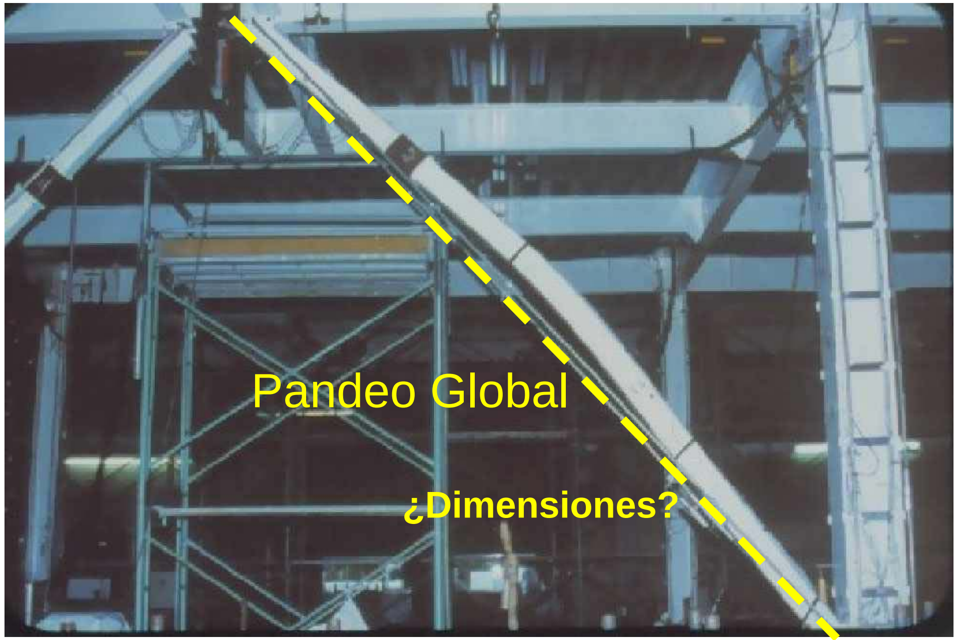
A
Modelo
C
α
β
B
P
A
C
¿Diámetro del cable ?
α
B
β

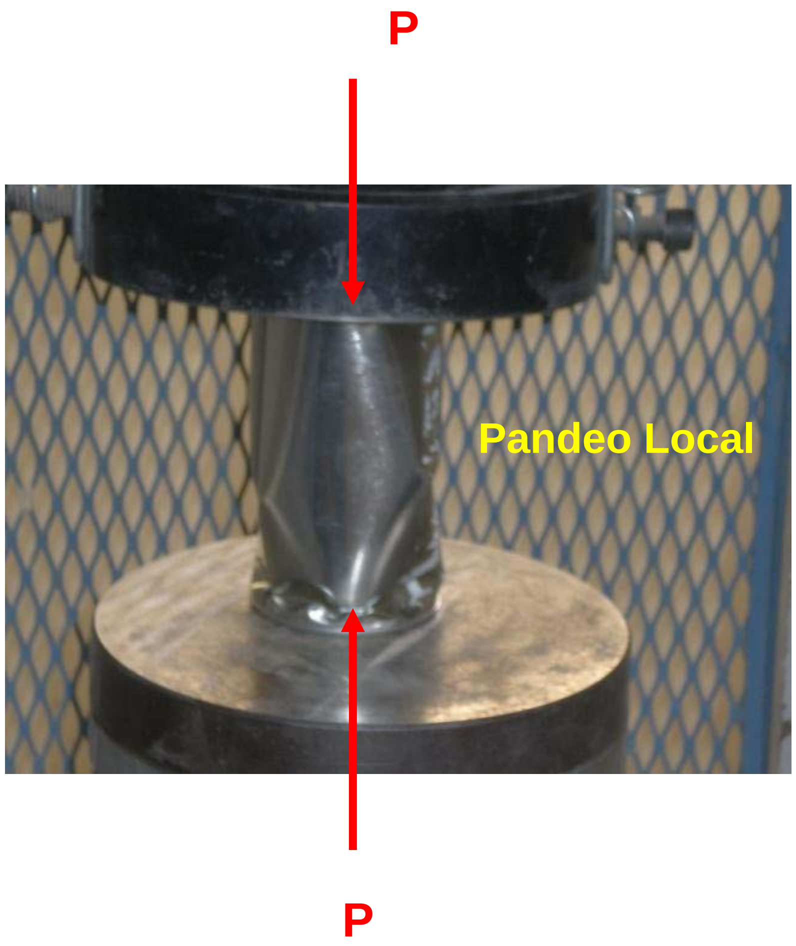


$W_2 = 330$ N
1.2 m
$W_1 = 2300$ N
18 mm
225 mm
¿Modelo?



¿Dimensiones?
h, b
$h = \frac{4b}{3}$
b
A
B
L_2
L_1
¿Modelo?
Si L_1>> h, b
q_o
A
B
$v_B \leq v_{adm}$
L_1


Pandeo Global
¿Dimensiones?


P
Pandeo Local
P

CARACTERISTICAS DEL SOLIDO

a. **Homogéneo o heterogéneo** en sus propiedades físicas y mecánicas.

b. **Isótropo** $\Rightarrow$ Las propiedades del sólido son independientes de la dirección que se considere.

c. **Continuo** $\Rightarrow$ Existe distribución continua de la materia. $\Rightarrow$ *(análisis infinitesimal).*

d. **Comportamiento Elástico-lineal**

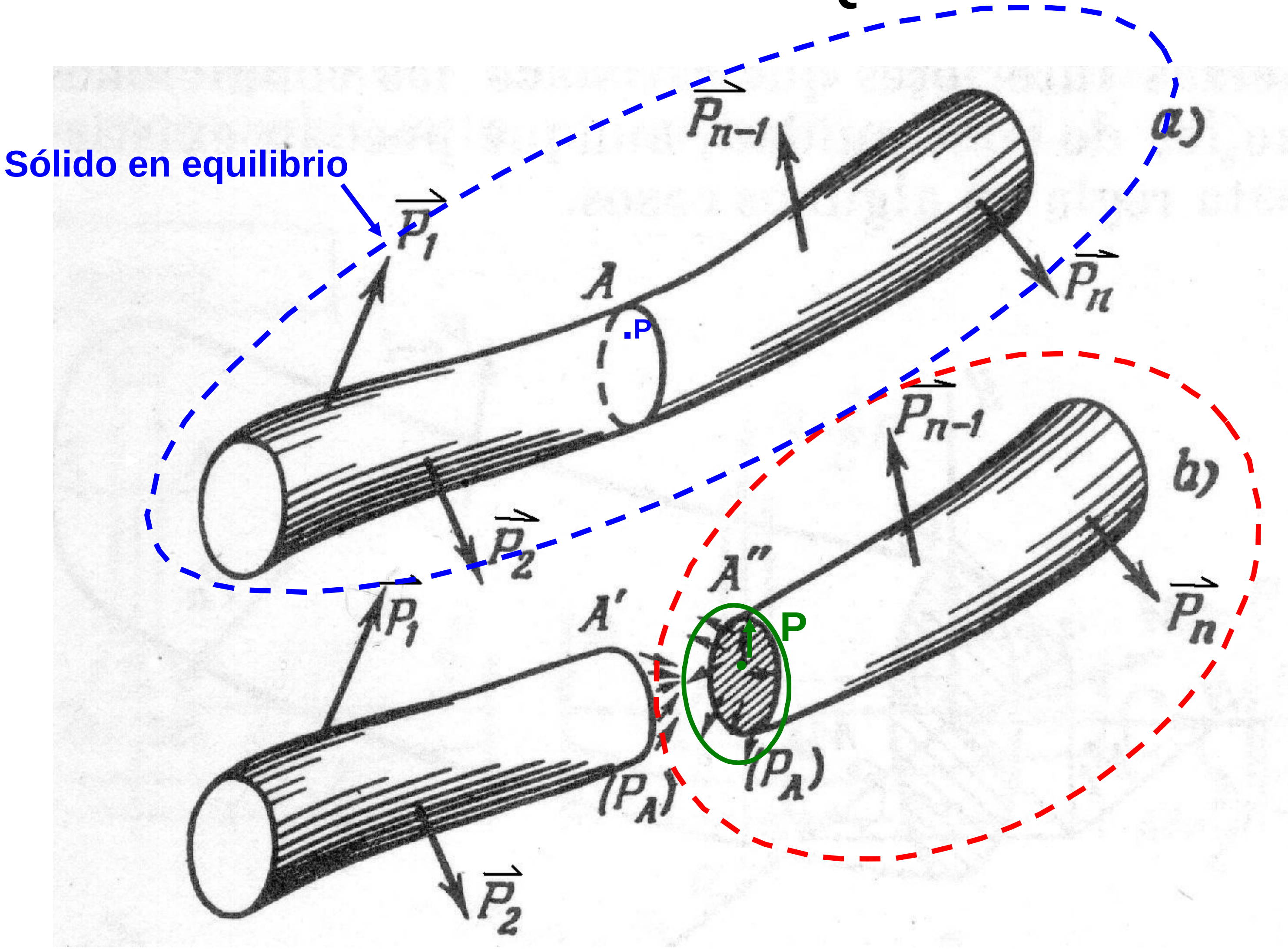
c.1 ***Elástico*** $\Rightarrow$ Recupera su forma al descargarse.

c.2 ***Lineal*** $\Rightarrow$ La relación ***tensión-deformación*** es lineal.

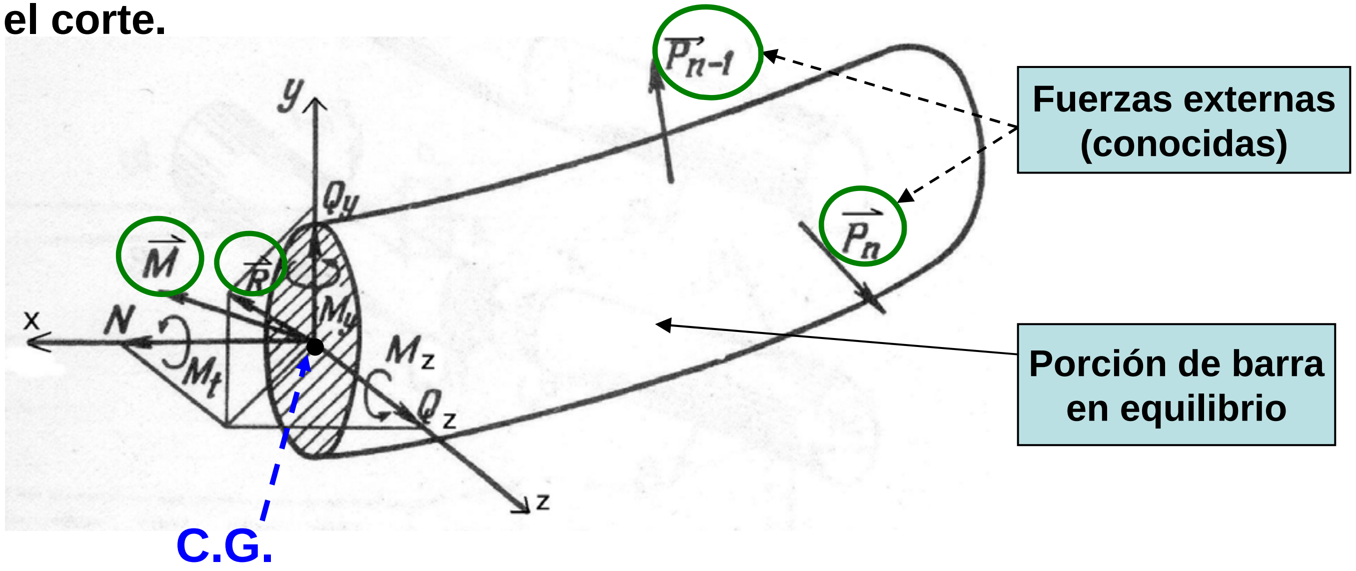
i. Este tipo de comportamiento se produce mientras no se sobrepase cierto nivel de deformación ***(Límite elástico).***

ii. Experimentalmente se puede comprobar que mientras el comportamiento sea de este tipo ***no hay daño en el sólido***. $\Rightarrow$ *Es el comportamiento que debe tener una estructura ante la acción de los estados de servicio de carga*

FUERZAS INTERNAS EN UN PUNTO P DE UN SOLIDO EN EQUILIBRIO



Al plantear las condiciones de equilibrio en el sistema de fuerzas que actúa sobre una porción del sólido, es posible determinar la resultante de las fuerzas internas ($\vec{M}$ y $\vec{R}$ o sus componentes M_t, M_y, M_z, N, Q_y, Q_z) en un punto (C.G.) de la sección comprometida por el corte.



"No es posible determinar la forma en que se distribuyen estas fuerzas internas en la sección."

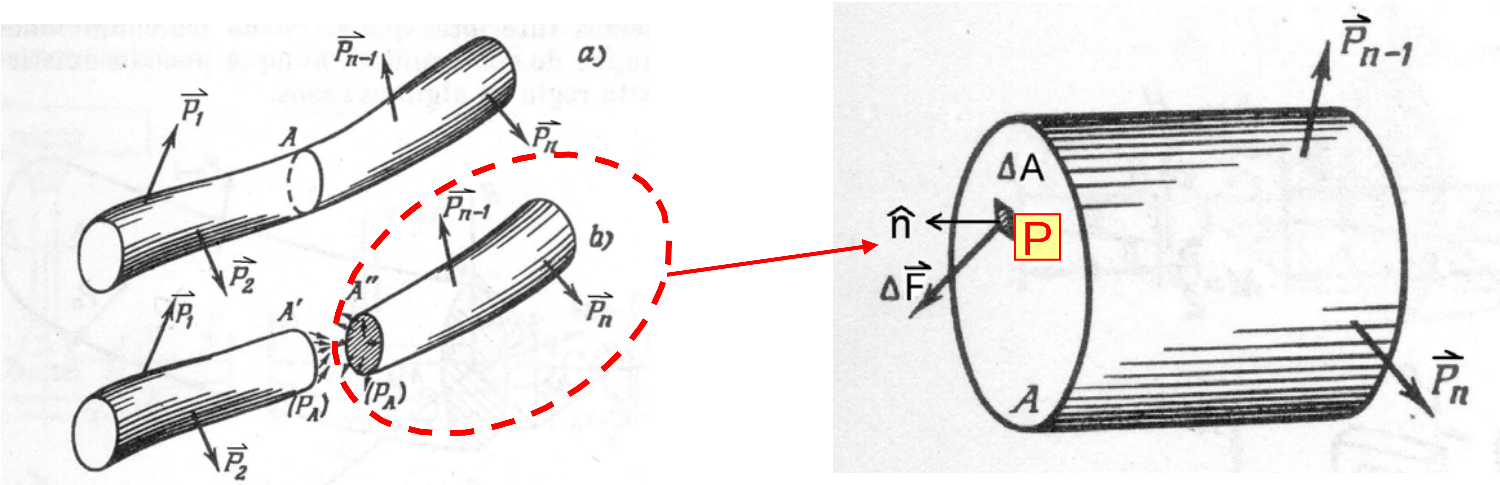
CONCEPTO DE TENSIÓN

Para determinar la forma en que se distribuyen las fuerzas internas que actúan en los puntos ubicados en una sección "A" de normal "$\hat{n}$" de un sólido, se introduce el concepto de "Tensión".

$$\vec{T}_n = \lim \left(\Delta \vec{F} \right) / (\Delta A) \qquad \text{cuando } \Delta A \rightarrow 0 \qquad \text{Ec. 1.1}$$

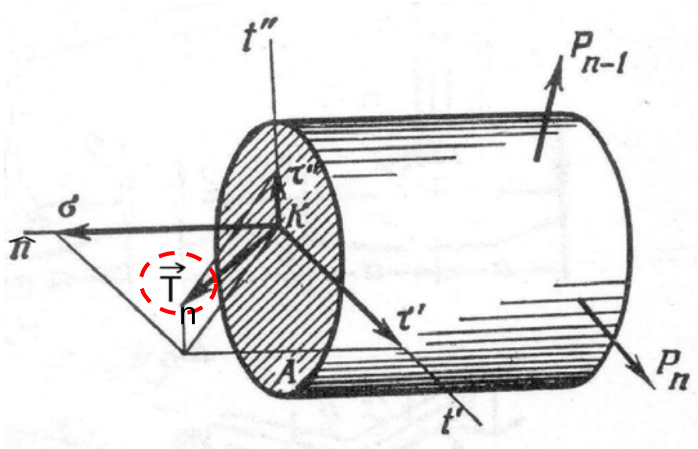
donde:

(ΔA) =	**área de un entorno del punto P, contenida en el plano sobre el que se calcula la tensión.**
$(\Delta \vec{F})$ =	**fuerza interna que actúa en el área (ΔA) del entorno del punto P.**



COMENTARIOS

- Para efectos prácticos, el vector de tensión $\vec{T}_n$ se descompone en ***tres componentes***: una componente normal al plano **(σ)** y dos componentes tangenciales **(τ´ y τ´´)** contenidas en este plano y perpendiculares entre sí.



- Al estar asociado el vector de tensión a un plano que pasa por el punto, **la magnitud y dirección del vector de tensión** varía de acuerdo con el plano que se considere ($\hat{n}$). De este modo, ***el conjunto de vectores de tensión*** que pueden actuar en los infinitos planos que pasan por el punto define el **"Estado de tensiones del punto".**

- **El estado de tensiones en un punto P [x, y, z] del sólido queda determinado si se conocen los vectores de tensión en tres planos perpendiculares entre sí que pasan por el punto y queda expresado por:**

$$\vec{T}_n = [\,T\,]\,\hat{n} \qquad \textbf{Ec. 1.2}$$

donde:

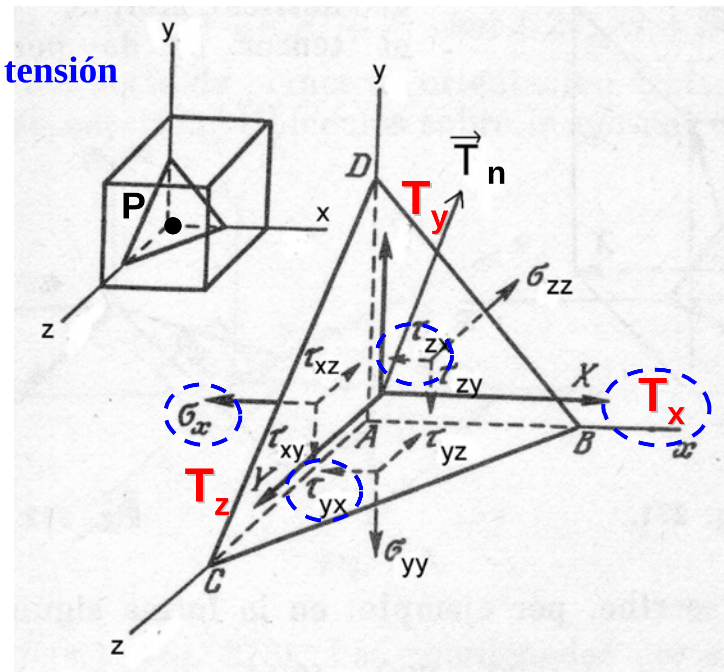
$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Matriz o tensor de tensión

$$\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$$

$$\vec{T}_n = (T_x, T_y, T_z)$$

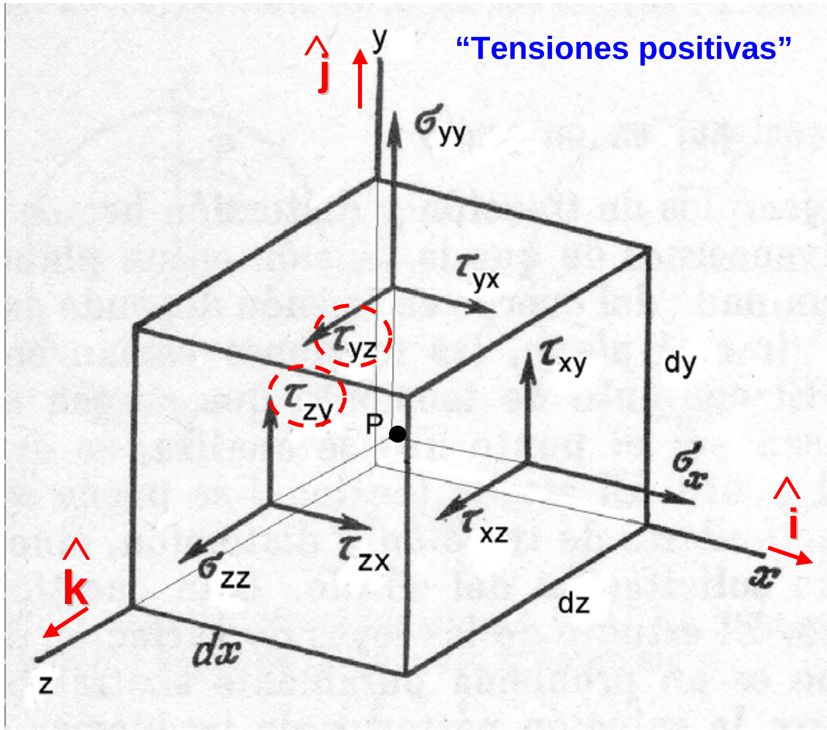
Para determinar esta ecuación basta con establecer las condiciones de equilibrio de fuerzas en un entorno tetraédrico infinitesimal al punto P.



= Fuerzas en la dirección "x"

- La matriz de tensiones es **simétrica,** por lo que basta conocer sólo <u>seis componentes</u> de ella en un punto P para determinar el estado de tensiones en él.

La simetría destacada se comprueba estableciendo la **condición de equilibrio** de momento en un volumen prismático **infinitesimal** en torno del punto "P" con caras paralelas a los planos del sistema de referencia.



"En las caras que no se ven, actúan las mismas tensiones pero en sentido contrario"

Por ejemplo*: Suma de los momentos que producen las fuerzas *en torno del eje x:

$$(\tau_{yz}\ dz\ dx)\ dy\ -\ (\tau_{zy}\ dy\ dx)\ dz = 0$$

Por lo tanto:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

(Reciprocidad de las tensiones tangenciales)

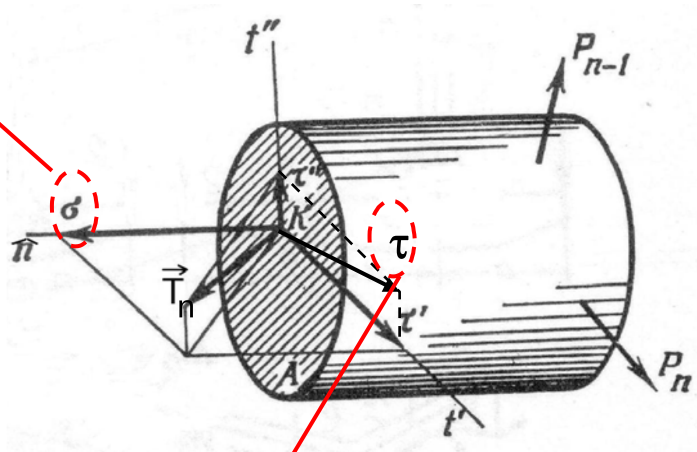
Del mismo modo, estableciendo la suma de momentos en torno de los otros dos ejes ("y" y "z"), se obtiene:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$
$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

Tensión normal en un plano de normal $\hat{n}$ (σ)

$$\sigma = \vec{T}_n \cdot \hat{n} = \{[T]\hat{n}\} \cdot \hat{n}$$

$$\sigma = \left(\sigma_{xx} \cdot n_x^{\ 2} + \sigma_{yy} \cdot n_y^{\ 2} + \sigma_{zz} \cdot n_z^{\ 2} + 2\tau_{xy} \cdot n_x \cdot n_y + 2\tau_{xz} \cdot n_y \cdot n_z + 2\tau_{yz} n_y \cdot n_z\right)$$



Tensión tangencial en un plano de normal $\hat{n}$ (τ)

$$\tau^2 = \left|\vec{T}_n\right|^2 - \sigma^2 = \left|[T]n\right|^2 - \sigma^2$$

Ejemplo: Un ejemplo de matriz de tensión en un punto de un sólido es la siguiente:

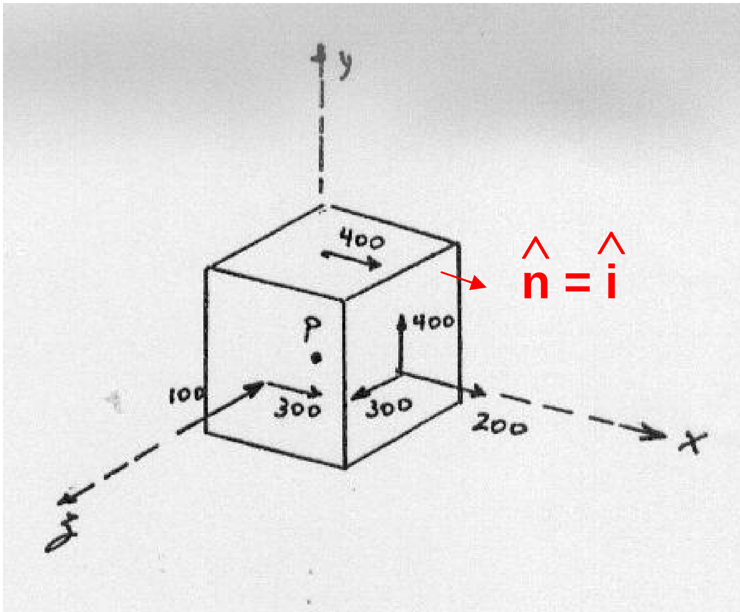
$$\begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{bmatrix}, en\left(kgf / cm^2\right)$$

Para representar las componentes de esta matriz de tensión, basta con tener en cuenta que:

σ_{xx} = 200, τ_{xy} = 400, τ_{xz} = 300 $\Rightarrow \vec{T}_i$

τ_{yx} = 400, σ_{yy} = 0, τ_{yz} = 0 $\Rightarrow \vec{T}_j$

τ_{zx} = 300, τ_{zy} = 0, σ_{zz} = - 100 $\Rightarrow \vec{T}_k$



TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES

- Para un "*estado de tensiones*" en un punto "P" de un sólido existen tres planos en los cuales las tensiones tangenciales son nulas.
- Las direcciones de las normales de estos planos se conocen como las direcciones principales del estado de tensiones.
- Las tensiones normales que actúan en estos planos se conocen como las tensiones principales del estado de tensiones.

El vector de tensión en cualquier de estos planos principales se puede escribir como:

$$\vec{T}_P = \sigma_P \, \hat{n}_P \qquad \text{con} \quad p = 1,2,3 \qquad \text{Ec. 1.3}$$

donde:

$\sigma_p =$ magnitud de la tensión principal.

$\hat{n}_P =$ dirección principal $= (n_{px}, n_{py}, n_{pz})$; $|\hat{n}_p| = 1.0$

Para obtener las tensiones y direcciones principales basta igualar las ecuaciones 1.2 y 1.3.

$$[\,T\,]\,\hat{n}_P = \sigma_P\,\hat{n}_P$$

obteniéndose un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_P) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_{yy} - \sigma_P) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_{zz} - \sigma_P) \end{bmatrix} \hat{n}_P = \vec{0} \qquad \text{[Ec. 1.4]} \quad \Rightarrow$$

Problema de valores y vectores propios.

Este sistema de ecuaciones homogéneo tiene solución no trivial si el <u>determinante de la matriz de los coeficientes es igual a cero</u>.

Al establecer esta condición se obtiene la ecuación cúbica:

$$\sigma_P^3 - I_1\,\sigma_P^2 + I_2\,\sigma_P - I_3 = 0 \qquad \text{[Ec. 1.5]}$$

$$\Downarrow$$

Tres raíces $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \Rightarrow$ Tensiones principales,

donde:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 &= \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} - \tau^2_{xy} - \tau^2_{xz} - \tau^2_{yz} \\ I_3 &= \text{determinante de } [\,T\,] = \sigma_{xx}\,\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\,\tau_{xy}\,\tau_{xz}\,\tau_{yz} - \sigma_{xx}\,\tau^2_{yz} - \sigma_{yy}\,\tau^2_{xz} - \sigma_{zz}\,\tau^2_{xy} \end{aligned}\right\}\ \text{Invariantes}$$

Considerando que los valores de estas tensiones sólo dependen del estado de tensiones.

- **Las tres componentes del vector normal de cada uno de los planos principales, $\hat{n}_P$, se obtienen reemplazando cada valor de σ_P en dos de las ecuaciones del sistema de ecuaciones (Ecuación 1.4) y la tercera ecuación corresponde a la condición de que el módulo de este vector es unitario.**

$$n_{Px}^2 + n_{Py}^2 + n_{Pz}^2 = 1$$

- **Considerando que la matriz [T] es simétrica y todos sus elementos son valores reales mayores, menores o iguales a cero, se puede probar que las raíces de la ecuación cúbica son <u>valores reales</u> y las normales de los planos principales son <u>perpendiculares entre sí</u>.**
- **En algunos estados de tensiones los invariantes pueden ser cero. Así se tiene:**

  i. $I_3 = 0$ $\Rightarrow$ **Estado biaxial o plano de tensiones (Una de las raíces de la ecuación 1.5 es igual a cero.**

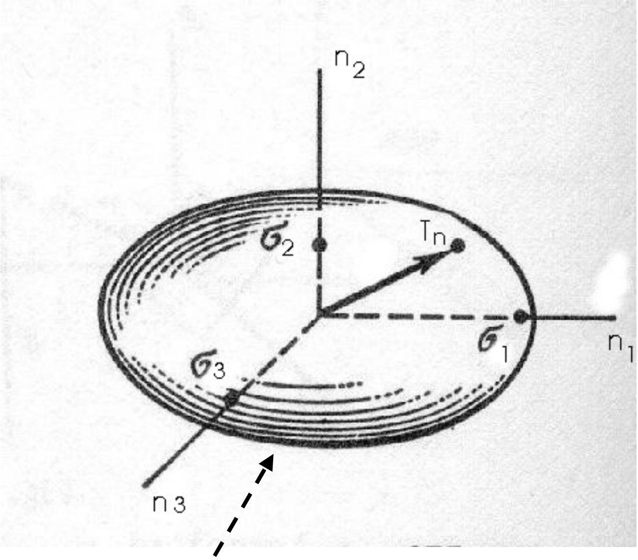
  ii. $I_2 = I_3 = 0$ $\Rightarrow$ **Estado monoaxial o lineal de tensiones (La ecuación 1.5 tiene dos raíces igual a cero).**

- **Si los ejes del sistema de referencia coinciden con las direcciones principales, la matriz de tensión toma la forma siguiente:**

$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Los invariantes quedan expresados como:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$
$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$
$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\,\sigma_3$$



Según la ecuación 1.2, en este sistema de referencia las componentes del vector de tensión que actúa en un plano de normal "$\hat{n}$" cualquiera, quedan dadas por:

$$T_x = n_x\,\sigma_1$$
$$T_y = n_y\,\sigma_2$$
$$T_z = n_z\,\sigma_3$$

Considerando que $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.0$, se obtiene:

$$T_x^2 / \sigma_1^2 + T_y^2 / \sigma_2^2 + T_z^2 / \sigma_3^2 = 1 \quad \Rightarrow \text{ecuación de un elipsoide}$$

Es decir el extremo del vector de tensión $\vec{T}$ se ubica sobre un elipsoide y las tensiones principales corresponden a los semiejes del elipsoide. De esta manera se tiene que la mayor de las tensiones principales es al mismo tiempo el valor máximo de la tensión en el punto y la menor de las tensiones principales es el valor mínimo de la tensión en el punto.