

CAPITULO 1

INTRODUCCION AL ANALISIS DE TENSIONES Y DEFORMACIONES DE UNA ESTRUCTURA

Con el propósito de seleccionar los materiales y establecer las dimensiones de los elementos que forman una estructura (Sólido) para resistir adecuadamente las acciones externas (*Sin experimentar daño o colapso, sin deformarse excesivamente, sin que su configuración inicial se vuelva inestable - pandeo global o local*), se han desarrollado métodos analíticos para determinar las tensiones y deformaciones considerando las características del sólido.

Entre estas características se pueden mencionar:

- a. Homogeneidad o heterogeneidad de sus propiedades físicas y mecánicas.
- b. Continuidad del sólido $\Rightarrow$ Existe distribución continua de la materia
- c. Comportamiento del sólido $\Rightarrow$ Elástico-lineal
 - c.1 Elástico $\Rightarrow$ Recupera su forma al descargarse
 - c.2 Lineal $\Rightarrow$ La relación fuerza-desplazamiento es lineal

Este tipo de comportamiento se produce mientras no se sobrepasen ciertos niveles de deformación (*límite elástico*).

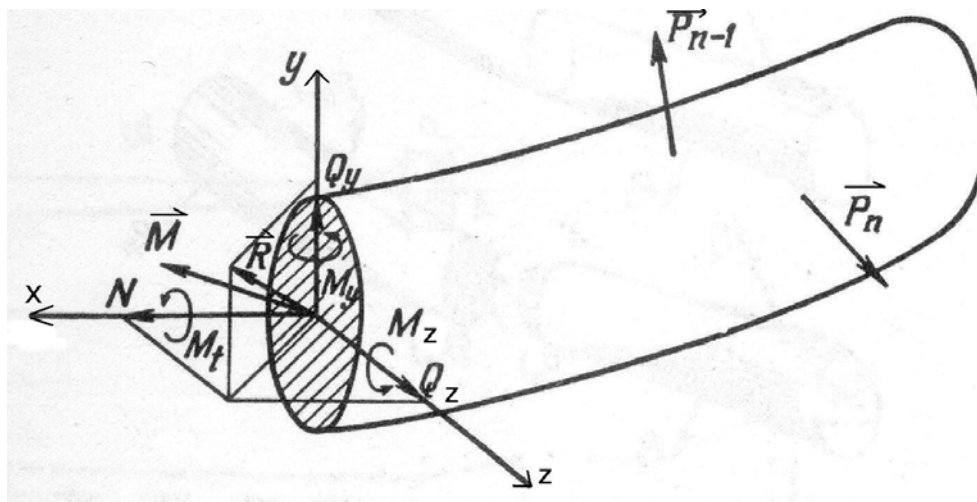
- d. Isotropía o anisotropía del sólido $\Rightarrow$ *Isotropía* $\Rightarrow$ sus propiedades son independientes de la dirección que se considere.

Como se comprobará en este curso, para realizar el análisis de las **tensiones y de las deformaciones** de los elementos que forman una estructura es necesario contar con la información siguiente:

- a. *Propiedades del material del cual está construida*
Ej: Comportamiento elástico-lineal de un sólido homogéneo e isotropo: $\underline{E}$ y $\underline{G}$ (ó μ).
- b. *Dimensiones de la estructura* (Geometría y dimensiones de los elementos).
- c. *Condiciones de apoyo de la estructura y de unión entre sus elementos.*
- d. *Estados de carga externo.*

1.1 Estado de tensiones en un punto

Del resultado del análisis de sistemas isostáticos se comprueba que al plantear las condiciones de equilibrio **a un sistema de fuerzas** que actúa en una porción del diagrama de cuerpo libre de un elemento que forma parte de una estructura formada por elementos uniaxiales, sólo es posible determinar **la resultante de las fuerzas internas** en un punto de una sección del elemento (Ver Figura 1.1) y no **la ley que determina la forma en que se distribuyen estas fuerzas internas** en la sección.



$(M_x, M_z, M_y, N, Q_y, Q_z \Rightarrow \text{Estado de esfuerzos de la sección})$

Figura 1.1

1.1.1 Concepto de tensión

Para determinar **la distribución de las fuerzas internas** que actúan en los puntos de una sección del sólido de normal “**n**”, se introduce el concepto de “**Tensión**”.

Por definición, la “**Tensión**” que actúa en **un punto “P”** de un sólido **en un plano de normal “n”** que pasa por él (ver Figura 1.2), está dada por la ecuación:

$$\vec{T} = \lim (\Delta \vec{F}) / (\Delta A) \quad \text{cuando } \Delta A \rightarrow 0 \quad \text{Ec. 1.1}$$

donde:

$(\Delta A) =$ área del entorno de P, contenida en el plano sobre el que se calcula la **tensión**.

$(\Delta \vec{F}) =$ fuerza interna que actúa en el área (ΔA) del entorno del punto P.

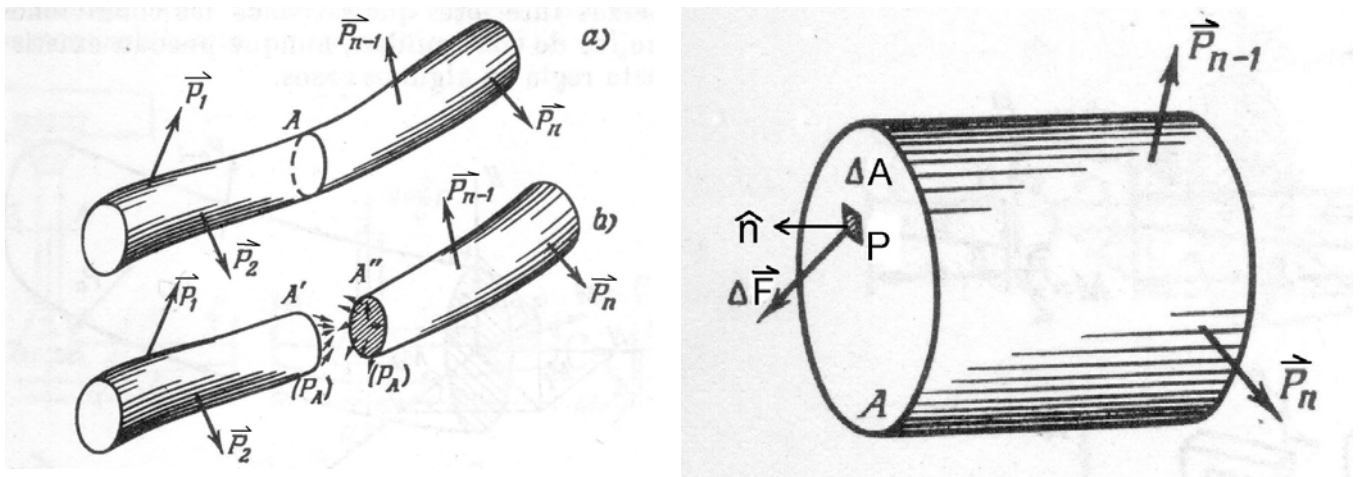


Figura 1.2

De esta forma, la tensión es un vector que se mide en unidades de fuerza por unidad de área, y estas unidades pueden ser en la práctica: N/mm^2 , kgf/cm^2 , psi , MPa .

Para efectos prácticos, el vector de tensión $\vec{T}$ se descompone en tres componentes (ver Figura 1.3): **una componente según la dirección de la normal al plano (σ)** y **dos componentes tangenciales (τ' y τ'')** contenidas en este plano, perpendiculares entre sí.

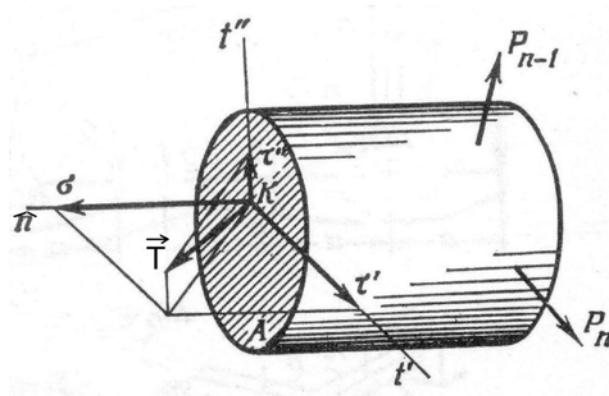


Figura 1.3

Al estar asociado el vector de tensión a un plano determinado que pasa por el punto, la magnitud y dirección del vector de tensión varía de acuerdo con el plano que se considere. De este modo, el conjunto de vectores de tensión que pueden actuar en los infinitos planos que pasan por el punto define el “**Estado de tensiones del punto**”.

Estableciendo las condiciones de equilibrio que debe cumplir el “sistema de fuerzas” que actúa en un entorno infinitesimal del punto de forma de un tetrahedro (ver Figura 1.4), se demuestra que el “**Estado de tensiones en un punto del sólido**” queda definido si se conocen los vectores de tensión que actúan en tres planos perpendiculares entre sí que pasan por el punto (Ver Figura 1.4).

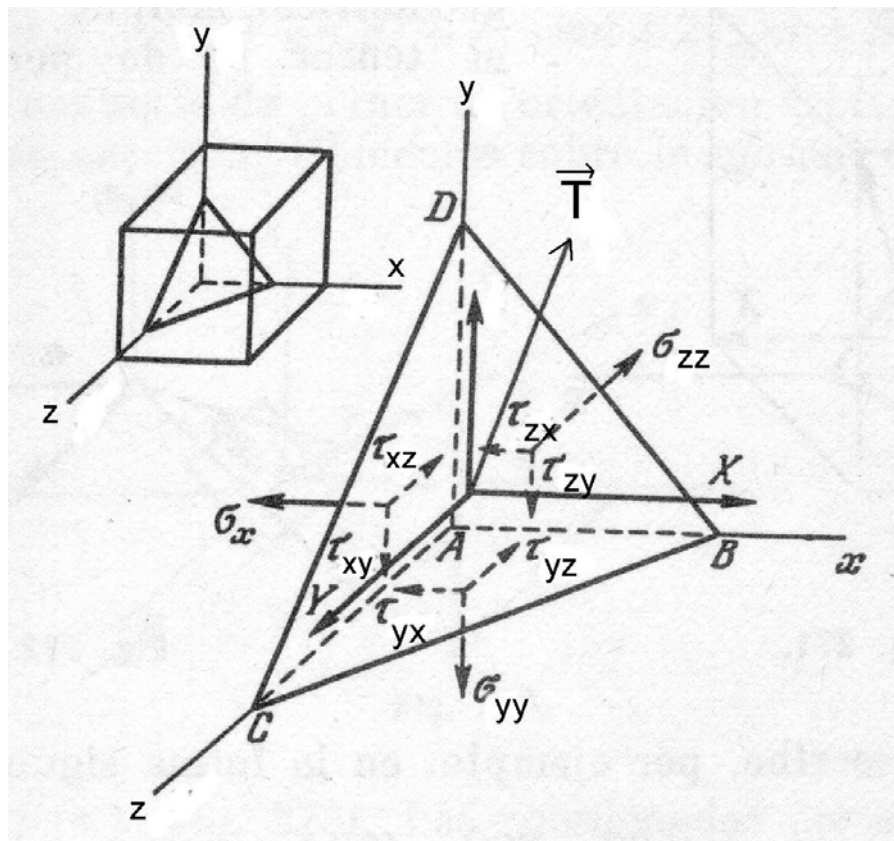


Figura 1.4

Si las normales de estos tres planos coinciden con la dirección de los ejes de un sistema cartesiano de referencia (**i**, **j**, **k**), los vectores de tensión que actúan en cada uno de estos planos son los siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{T}_i &= (\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}) \quad \Rightarrow \quad \text{cara CAD} \\ \vec{T}_j &= (\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}) \quad \Rightarrow \quad \text{cara CAB} \\ \vec{T}_k &= (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz}) \quad \Rightarrow \quad \text{cara DAB}\end{aligned}$$

Estableciendo el equilibrio de fuerzas en las direcciones de los ejes del sistema de referencia, se demuestra que el vector de tensión $\vec{T}_n$ que actúa en el plano cuya normal (unitaria) es $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ queda expresado por la ecuación:

$$\vec{T}_n = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = [T] \mathbf{n} \quad \text{Ec. 1.2}$$

donde:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \text{Matriz o tensor de tensión}$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \text{vector unitario de la normal del plano donde se calcula el vector de tensión.}$$

Como ejemplo, si se establece el equilibrio de las fuerzas que actúan en la dirección del eje x , las fuerzas comprometidas son:

- i. en la cara BCD: $T_x \bullet A$
- ii. en la cara CDA: $\sigma_{xx} \bullet A \cos(n, i) = \sigma_{xx} \bullet A \bullet n_x$
- iii. en la cara CBA: $\tau_{yx} \bullet A \bullet \cos(n, j) = \tau_{yx} \bullet A \bullet n_y$
- iv en la cara DAB: $\tau_{zx} \bullet A \bullet \cos(n, k) = \tau_{zx} \bullet A \bullet n_z$

Por equilibrio se cumple: $\sum F_x = 0$

Resultando:

$$\begin{aligned}
 T_x \bullet A &= \sigma_{xx} \bullet A \bullet n_x + \tau_{yx} \bullet A \bullet n_y + \tau_{zx} \bullet A \bullet n_z \\
 T_x &= \sigma_{xx} \bullet n_x + \tau_{yx} \bullet n_y + \tau_{zx} \bullet n_z
 \end{aligned}$$

Del mismo modo, estableciendo el equilibrio en las direcciones del eje y y z, se obtiene una expresión para las componentes T_y y T_z del vector de tensión, respectivamente, obteniéndose la ecuación 1.2.

La matriz de tensiones es simétrica, por lo que basta conocer sólo **seis componentes** de ella en un punto para determinar el estado de tensiones en él. La simetría destacada se comprueba estableciendo la condición de equilibrio de momento en un volumen prismático infinitesimal en torno del punto “P”, prisma cuyas caras son paralelas a los planos del sistema de referencia (ver Figura 1.5) y en sus caras ocultas (no vista) aparecen las mismas tensiones pero de sentido contrario.

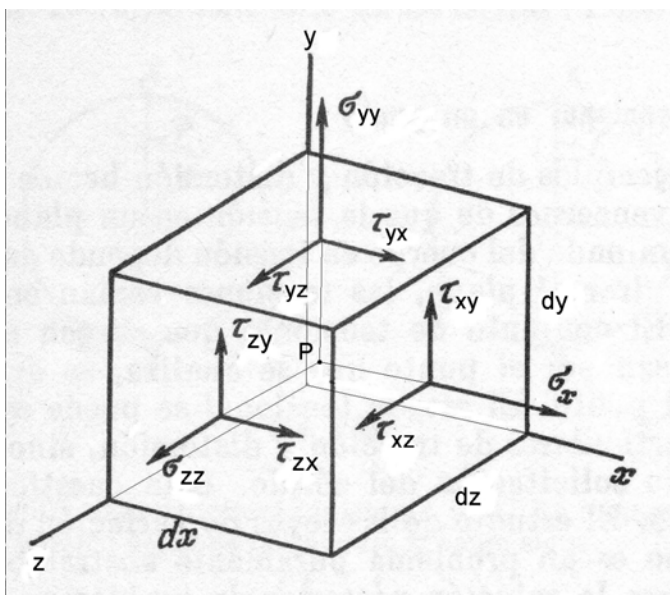


Figura 1.5

Por ejemplo: Suma de los momentos que producen las fuerzas *en torno del eje x*:

$$(\tau_{yz} dz dx) dy - (\tau_{zy} dy dx) dz = 0$$

Por lo tanto:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Del mismo modo, estableciendo la suma de momentos en torno de los otros dos ejes, se obtiene:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

- **Convención de signo**

Para establecer el signo de las tensiones normales y tangenciales se considera la convención siguiente:

a. **Las tensiones normales (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz}) son positivas** si al actuar en un plano de normal positiva, como son los planos mostrados en la Figura 1.5, es decir en un plano cuya normal está dirigida en el sentido positivo del eje del sistema de referencia, la tensión apunta en el sentido positivo del eje, y si al actuar en un plano de normal negativa, la tensión actúa en el sentido opuesto al sentido positivo del eje del sistema de referencia.

De acuerdo con esta convención las tensiones normales de tracción indicadas en la Figura 1.5 son positivas.

b. **Las tensiones tangenciales (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}) son positivas** si al actuar en un plano de normal positiva, como los mostrados en la Figura 1.5, su sentido corresponde al sentido positivo del eje del sistema de referencia, y si al actuar en un plano de normal negativa, la tensión actúa en el sentido opuesto al sentido positivo del eje del sistema de referencia.

De acuerdo con esta convención las tensiones tangenciales indicadas en la Figura 1.5 son positivas.

Ejemplo:

La matriz de tensión en un punto de un sólido es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{vmatrix}, \text{ en kgf/cm}^2$$

Para representar las componentes de esta matriz de tensión, basta con tener en cuenta que:

$$\sigma_{xx} = 200, \quad \tau_{xy} = 400, \quad \tau_{xz} = 300 \quad \Rightarrow \quad T_x$$

$$\tau_{yx} = 400, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_y$$

$$\tau_{zx} = 300, \quad \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_{zz} = -100 \quad \Rightarrow \quad T_z$$

1.1.2 Tensiones y direcciones principales

Para un estado de tensiones en un punto “P” de un sólido existen **tres** planos en los cuales las tensiones tangenciales son nulas. Las direcciones de las normales de estos planos se conocen como las **direcciones principales** y las tensiones normales que actúan en estos planos se conocen como las **tensiones principales del punto**.

Para determinar estas direcciones y tensiones principales basta con considerar que el vector de tensión en cualquier de estos planos principales se puede escribir como:

$$\vec{T}_P = \sigma_P \mathbf{n}_P \quad \text{con } p = 1, 2, 3 \quad \text{Ec. 1.3}$$

donde:

σ_P = magnitud de la tensión principal.

$\mathbf{n}_P$ = dirección principal = (n_{Px}, n_{Py}, n_{Pz}) ; $|\mathbf{n}_P| = 1.0$

Igualando la ecuación 1.3 con la expresión general del vector de tensión, Ec. 1.2, se obtiene un sistema de ecuaciones con el cual se determina la magnitud de las

tensiones principales (σ_p) y las direcciones de las normales de los planos ($\mathbf{n}_p$) donde actúan estas tensiones. Así se tiene:

$$[T] \mathbf{n}_p = \sigma_p \mathbf{n}_p$$

Ecuación que se puede escribir de la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_p) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_{yy} - \sigma_p) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_{zz} - \sigma_p) \end{vmatrix} \mathbf{n}_p = \vec{0} \quad [\text{Ec. 1.4}]$$

Este sistema de ecuaciones homogéneo tiene solución no trivial si el determinante de los coeficientes de la matriz es igual a cero. Estableciendo esta condición, se obtiene la ecuación cúbica:

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p - I_3 = 0 \quad [\text{Ec. 1.5}]$$

⇓

Tres raíces ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)

donde:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{xx} \sigma_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \text{determinante de } [T] = \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_{xx} \tau_{yz}^2 - \sigma_{yy} \tau_{xz}^2 - \sigma_{zz} \tau_{xy}^2$$

Considerando que estas tensiones principales son una característica del estado de tensiones de un punto, ellas son independientes del sistema de coordenadas y se

debe cumplir que los valores de I_1 , I_2 e I_3 son siempre los mismos y, por consiguiente, son invariantes.

Las tres componentes de cada vector normal de los planos principales, $\mathbf{n}_p$, se obtienen reemplazando cada valor de σ_p en dos de las ecuaciones del sistema de ecuaciones (Ecuación 1.4) y la tercera ecuación corresponde a la condición de que el módulo de estos vectores es unitario.

$$n_{px}^2 + n_{py}^2 + n_{pz}^2 = 1$$

Considerando que la matriz $[T]$ es simétrica y todos sus elementos son reales, se puede probar que las raíces de la ecuación cúbica son valores reales y las normales de los planos principales son perpendiculares entre sí.

Comentarios:

a. Si los ejes del sistema de referencia coinciden con las direcciones principales, la matriz de tensión toma la forma siguiente:

$$[T] = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

Además los invariantes quedan expresados como:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

En este sistema de referencia, las componentes del vector de tensión que actúa en un plano de normal “**n**” cualquiera, quedan dadas por:

$$T_x = n_x \sigma_1$$

$$T_y = n_y \sigma_2$$

$$T_z = n_z \sigma_3$$

Considerando que $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.0$, se obtiene que:

$$T_x^2 / \sigma_1^2 + T_y^2 / \sigma_2^2 + T_z^2 / \sigma_3^2 = 1$$

De esta ecuación se concluye que el extremo del **vector de tensión** $\vec{T}$ se ubica sobre un elipsoide, ver Figura 1.6, y que las tensiones principales corresponden a los semiejes del elipsoide. De esta manera se tiene que la mayor de las tensiones principales es al mismo tiempo el valor máximo posible del estado de tensión en el punto y la menor de las tensiones principales es el valor mínimo de la tensión en el punto.

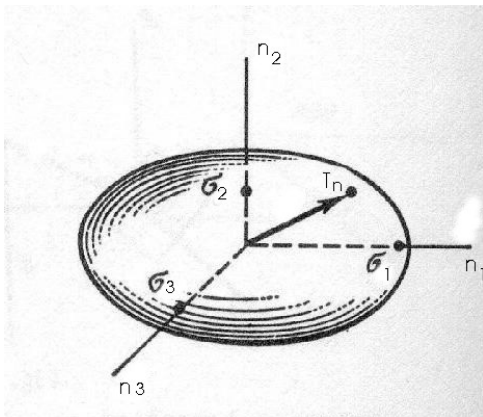


Figura 1.6

1.1.3 Sólido sometido a um estado plano o biaxial de tensiones

Esta situación corresponde a aquellos casos en los cuales el estado de tensiones en cualquier punto del sólido se caracteriza porque las componentes del vector de tensión son nulas en un mismo plano. Un ejemplo de este estado de tensiones ocurre en láminas delgadas sometidas a cargas en su plano

Si la normal de este plano se hace coincidir con la dirección del eje z del sistema de referencia, en el estado biaxial de tensiones se cumple:

$$\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \Rightarrow \text{Estado de tensiones plano en el plano x-y}$$

En este caso, el estado de tensiones en cualquier punto se conoce si se conocen las componentes indicadas en la Figura 1.7:

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

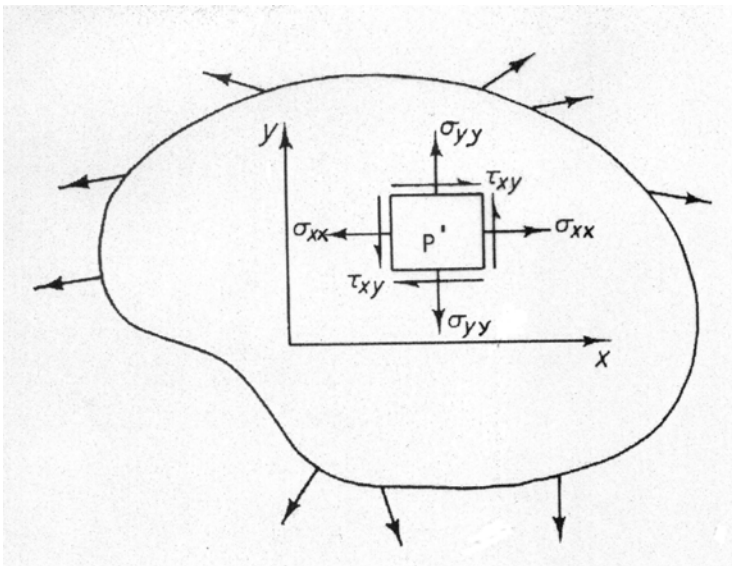


Figura 1.7

Para este estado de tensiones, el vector de tensiones en un plano que pasa por un punto y cuya normal forma un ángulo α con el eje x, se puede representar como se muestra en la Figura 1.8.

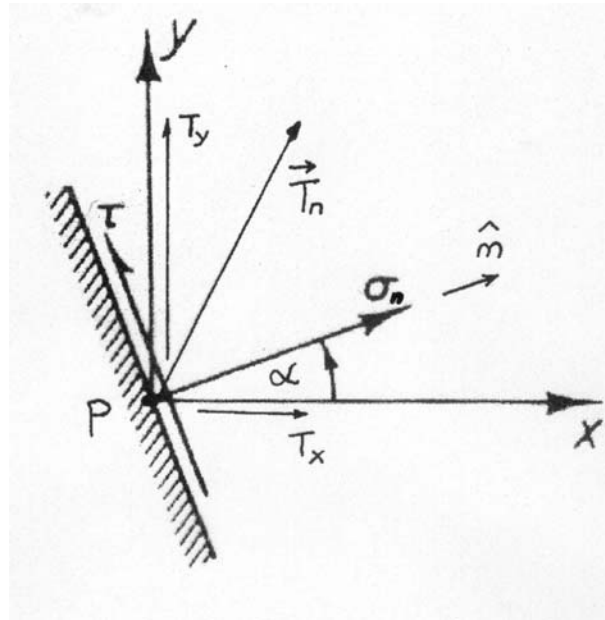


Figura 1.8

1.1.3.1 Componentes del vector de tensiones en las direcciones de los ejes x e y.

Considerando las características de este estado de tensiones, de la Ec. 1.2 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

Resultando:

$$T_x = \sigma_{xx} \cos(\alpha) + \tau_{xy} \sin(\alpha) \quad [\text{Ec. 1.6a}]$$

$$T_y = \tau_{xy} \cos(\alpha) + \sigma_{yy} \sin(\alpha) \quad [\text{Ec. 1.6b}]$$

donde:

α = ángulo que forma la normal del plano donde se calcula la tensión con la dirección del eje x del sistema de referencia, medido en el sentido opuesto a los movimientos de los punteros del reloj (ver Figura 1.8).

1.1.3.2 Componentes del vector de tensión en la dirección normal y tangencial .

Proyectando las componentes T_x y T_y en la dirección de la normal $\mathbf{n}$ y de la tangente al plano, se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= T_x \cos(\alpha) + T_y \sin(\alpha) \\ \tau &= -T_x \sin(\alpha) + T_y \cos(\alpha)\end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones de T_x y T_y de las ecuaciones 1.6, se obtiene reagrupando términos:

$$\sigma_n = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\alpha) / 2 + (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 + \tau_{xy} \sin(2\alpha) \quad \text{Ec.1.7a}$$

$$\tau = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin(2\alpha) / 2 + \tau_{xy} \cos(2\alpha) \quad \text{Ec.1.7b}$$

1.1.3.3 Direcciones y tensiones principales

Para determinar las direcciones principales basta con igualar a cero la ecuación 1.7b, resultando:

$$\tan (2\alpha_o) = 2 \tau_{xy} / (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \quad \text{Ec. 1.8}$$

Considerando que las direcciones principales son perpendiculares entre sí, el ángulo que define la otra dirección principal para un estado plano de tensiones es:

$$\alpha'_o = \alpha_o + \pi / 2 \quad \text{Ec. 1.9}$$

Las tensiones principales asociadas a estos planos principales se obtienen reemplazando los valores de α_o y α'_o en la ecuación 1.7a.

1.1.3.4 Planos de máxima tensión tangencial

El ángulo α_1 que forma la normal del plano donde se produce la tensión tangencial máxima se obtiene derivando la ecuación 1.7b y haciendo igual a cero la expresión que resulta, resultando:

$$d\tau / d\alpha = - (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\alpha) - 2 \tau_{xy} \sin(2\alpha)$$

Igualando a cero se obtiene:

$$\tan (2\alpha_1) = - (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / \{ 2 \tau_{xy} \} = - \cotang (2\alpha_o)$$

Por lo tanto: $2\alpha_1 = 2\alpha_o + \pi / 2$

con lo cual $\alpha_1 = \alpha_o + \pi / 4 \quad \text{Ec. 1.10}$

Así, la normal de uno de los planos donde actúa la tensión tangencial máxima forma el ángulo α_1 con la dirección del eje x y el otro plano, perpendicular al anterior, su normal forma con la dirección del eje x el ángulo:

$$\alpha'_1 = \alpha_o + 3\pi / 4$$

Para determinar la magnitud de la tensión tangencial máxima y la magnitud de la tensión normal que actúa en conjunto con ella, basta con reemplazar los ángulos α_1 y α'_1 en las ecuaciones 1.7b y 1.7a respectivamente.

1.1.3.5 Representación gráfica del estado plano de tensiones. Círculo de Mohr.

Para hacer esta representación gráfica se trabaja en el sistema de ejes (σ_n, τ) y para obtener la curva que representa el estado de tensiones de un punto del sólido basta con escribir la ecuación 1.7a de la forma siguiente:

$$[\sigma_n - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2] = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos (2\alpha) / 2 + \tau_{xy} \operatorname{sen} (2\alpha)$$

Elevando al cuadrado la expresión anterior y sumándola con el cuadrado de τ , ecuación 1.7b, se obtiene:

$$[\sigma_n - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2]^2 + \tau_{xy}^2 \quad \text{Ec. 1.11}$$

En el sistema de ejes (σ_n, τ) , la ecuación 1.11 representa a un círculo de radio:

$$R^2 = \left\{ \left[\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2 \right\} \text{ y coordenadas del centro, } C: \left[\frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2}, 0 \right].$$

Este círculo se conoce como Círculo de Mohr y su representación gráfica se muestra en la Figura 1.9 cuando σ_{xx} y σ_{yy} son mayores que cero (tensiones de tracción).

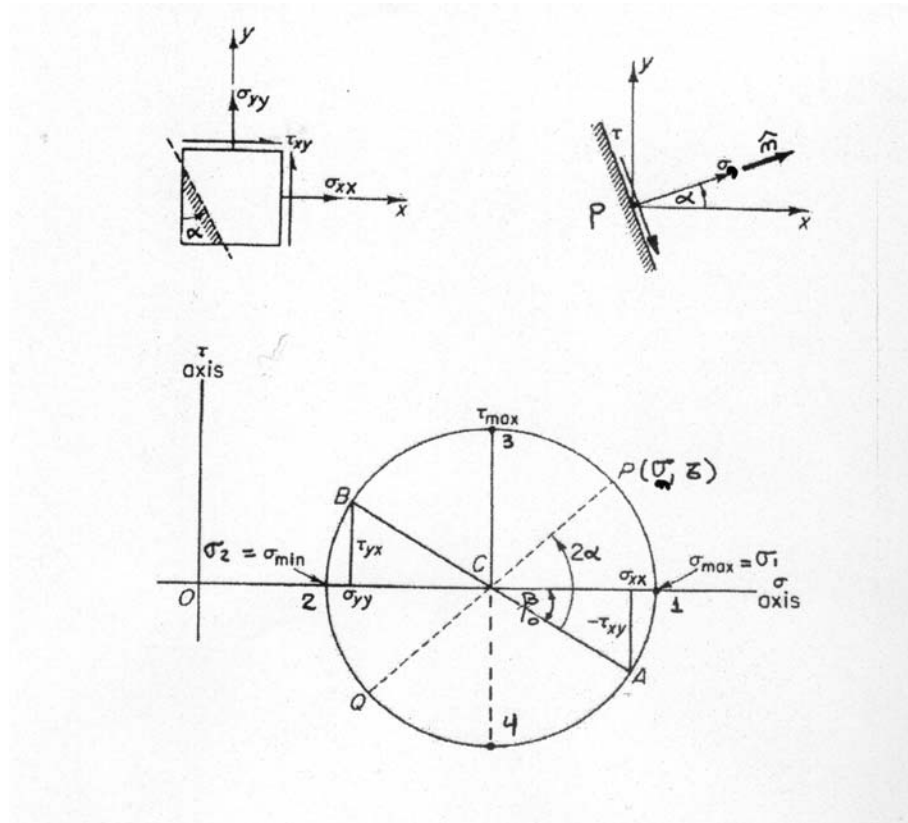


Figura 1.9

Para realizar la representación gráfica del estado de tensiones plano, se considera la convención de signos siguiente:

- i) La tensión normal σ_n es positiva si es una tensión de tracción (apunta en la dirección de la normal del plano).
- ii) La tensión tangencial τ es positiva si al desplazarla levemente en la dirección de la normal $\mathbf{n}$, produce un momento en torno del punto en el sentido del movimiento de los punteros del reloj.

En la Figura 1.9 se muestran estas tensiones cuando son positivas de acuerdo con la convención destacada.

Trazado del círculo de Mohr:

Considerando la convención anterior, los vectores de tensión que actúa en los planos que pasan por un punto cualquiera del sólido y cuyas normales están dirigidas en el sentido positivo de los ejes del sistema de coordenadas x e y , quedan representados por los puntos **A** y **B** en la Figura 1.9.

Conocida la ubicación de estos puntos, se dibuja el círculo de la forma siguiente:

- a. El centro del círculo de Mohr (**Punto C**) corresponde al punto donde la recta que une los puntos **A** y **B** corta al eje σ .
- b. El radio del círculo es la mitad de la longitud del **trazo AB**.

Analizando el círculo de Mohr, se tiene que el ángulo β que forma cualquier radio CP con el radio CA, representa el doble del ángulo α que forma la normal del plano donde actúan las tensiones (σ_n y τ) con el eje x . Para comprobar esta relación basta

con tener en cuenta que la tangente del ángulo β_o , ángulo que forma el radio C1 con CA, es:

$\tan (\beta_o) = 2 \tau_{xy} / (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = \tan (2\alpha_o) \Rightarrow$ el **punto 1** de la Figura 1.9 representa el estado de tensiones que se produce en uno de los planos principales ($\sigma_1, 0$) y por lo tanto el **punto 2** representa este estado ($\sigma_2, 0$) en el otro plano principal (ortogonal con el anterior).

De esta representación gráfica del estado de tensiones se deduce que la magnitud de las tensiones principales es:

$$\sigma_1 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 + \{ [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2]^2 + \tau_{xy}^2 \}^{0.5} \quad \text{Ec. 1.12a}$$

$$\sigma_2 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 - \{ [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2]^2 + \tau_{xy}^2 \}^{0.5} \quad \text{Ec. 1.12b}$$

Los puntos **3** y **4** de la Figura 1.9, representan la tensión normal y tangencial que actúan en los planos donde se producen las tensiones tangenciales máximas. Los valores de estas tensiones son:

$$\tau_{\max} = \{ [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2]^2 + \tau_{xy}^2 \}^{0.5} \quad \text{Ec. 1.13}$$

$$\sigma_3, \sigma_4 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 \quad \text{Ec. 1.14}$$

De esta representación se confirma que los planos donde se producen las tensiones tangenciales máximas son perpendiculares entre sí y forman un ángulo de 45° con las direcciones principales.

Resumiendo se debe destacar que para determinar las componentes normal y tangencial que actúan en el plano que pasa por el punto P y cuya normal forma un ángulo α con el eje x, basta con dibujar el doble del ángulo α a partir del radio CA en el mismo sentido que se mide α con respecto del eje x. Las coordenadas del punto son las componentes buscadas. Para dibujar el sentido de estas tensiones debe considerarse la convención usada para la representación del círculo de Mohr.