

MECÁNICA DE FLUIDOS

Alberto de la Fuente Stranger
Yarko Niño Campos
Aldo Tamburrino Tavantzis

v.1.0

2010

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

Interesarnos en estudiar el movimiento de los fluidos parece ser obvio y no requerir mayor justificación si consideramos que sin ellos, simplemente no existiríamos. Un alienígena, al observar nuestro planeta desde el espacio exterior lo más probable es que lo llame “Agua” y no “Tierra”, al ver que el 70% de la superficie terrestre está constituido por agua, como se aprecia en la **Figura 1.1**. Pero no es sólo el agua el único fluido que caracteriza nuestro planeta, el extraterrestre también detectaría la presencia de otro fluido, la atmósfera, en el que ocurren fenómenos a gran escala, como los huracanes sobre el Océano Pacífico de la **Figura 1.1**.



Figura 1.1: Vista la Tierra desde el espacio exterior y fenómenos atmosféricos.
http://www.nasa.gov/audience/foreducators/k-4/features/F_Visible_Earth.html
http://veimages.gsfc.nasa.gov/20946/image08092006_md.jpg

La vida requirió de un medio fluido para su desarrollo, y hace unos 4400 millones de años la existencia de una atmósfera gaseosa y las condiciones imperantes facilitaron la formación de compuestos orgánicos. Uno de los resultados de la evolución, el ser humano, está compuesto en un 95% de agua. El diámetro de la Tierra es aproximadamente 12.756 km, pero la parte sólida constituye sólo una cáscara superficial con un espesor entre 8 y 40 km, dependiendo si es en la zona de los océanos o de los continentes. Gran parte del resto está constituido por fluidos con características especiales (altamente viscosos o no-newtonianos y propiedades electromagnéticas), sometido a altas presiones y temperaturas, encontrándose inmediatamente bajo la corteza, el manto, una capa de 2900 km de roca fundida, seguida por el núcleo exterior formado básicamente de hierro fundido y en el centro el núcleo interno, la región de mayor temperatura (similar a la que existe en la superficie del Sol), siendo una esfera sólida de 1220 km de diámetro constituida por hierro y níquel.

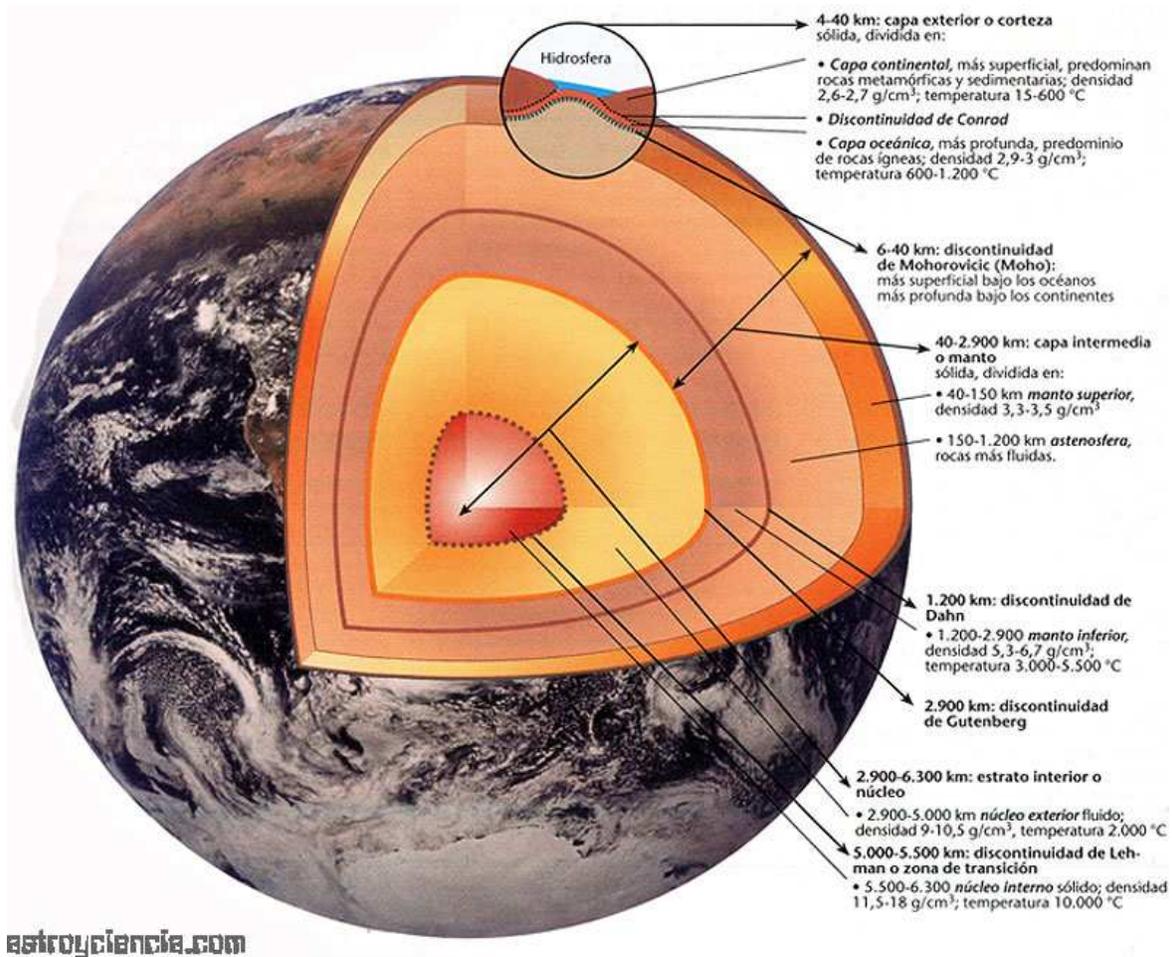


Figura 1.2: Regiones del interior de la Tierra

La historia de la humanidad ha sido moldeada por la acción de los fluidos y la fluidodinámica. Muchos de los procesos que han definido la morfología de la Tierra involucran flujos de agua sobre ella, definiendo una geografía que ha limitado o favorecido los fenómenos de inmigración tanto del hombre como de otros seres vivos, con sus consecuentes efectos en el desarrollo de la civilización. No es coincidencia que casi todas las grandes civilizaciones se hayan desarrollado en torno a grandes ríos: Es así como se asocian inseparablemente a la civilización que se desarrolló en Mesopotamia los ríos Tigris y Éufrates, la civilización egipcia es asociada con el río Nilo, la china con el río Amarillo y la del valle del Indus con el río Indo.

Procesos relacionados con la mecánica de fluidos los encontramos en los fenómenos climáticos y atmosféricos, movimiento de vehículos (trenes, automóviles, barcos, aviones, etc.), medioambiente, fisiología y medicina, deportes y recreación, armamentos, etc.

Evidentemente, el desarrollo de la mecánica de fluidos y la forma en que se presenta en este curso se basa en el método científico. Esto, que puede parecer obvio hoy, es algo relativamente reciente en la historia de la civilización. La forma de explicar los fenómenos naturales ha cambiado a lo largo del tiempo y es así como podemos identificar tres maneras de hacerlo: mediante una mitología de la naturaleza, una filosofía de la naturaleza y, por último, una ciencia de la naturaleza.

En su primera forma de explicar el mundo en que vivía, el ser humano lo hizo mediante la acción divina de seres superiores. En esta etapa, prácticamente todas las civilizaciones antiguas desarrollaron leyendas o mitos asociados al agua. Es así como de acuerdo a quienes inventaron la escritura (los sumerios, ~3500 a.C.) el océano existió primero y de él nacieron el cielo y la tierra. También el relato de la creación de los mayas, registrado en el Popol Vuh, indica que en el comienzo "...estaba el cielo, completamente solo; estaba el mar, completamente solo; no había nada más; ningún sonido, ningún movimiento; solo el cielo y el mar ...". En el periodo correspondiente a la filosofía de la naturaleza, se aplica el riguroso método

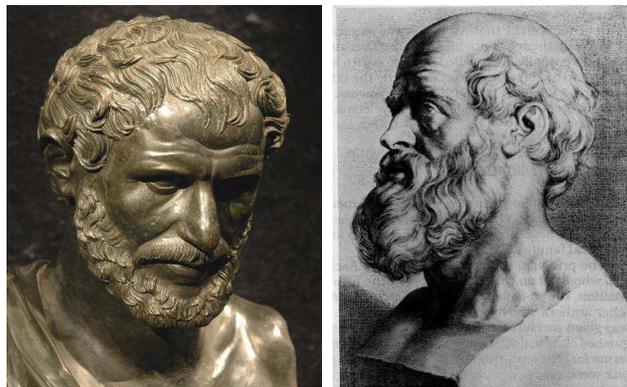


Figura 1.3: Heráclito de Éfeso (estatua romana) e Hipócrates (dibujo de P. P. Rubens)

racional desarrollado por los griegos para interpretar y entender los fluidos y su movimiento. Es en este periodo cuando Heráclito de Éfeso (535 - 484 a.C.) formula su filosofía basada en que “todo fluye” ($\pi\alpha\nu\tau\alpha\ \rho\epsilon\iota$), haciendo analogía al flujo del agua en un río. Hipócrates de Cos (\sim 460 - 377 a.C.), considerado el padre de la medicina, escribió “Aires, Aguas y Lugares”, el tratado más antiguo que se conoce donde discute el efecto de las condiciones atmosféricas en la salud¹. La filosofía de Aristóteles (384 - 322 a.C.) dominó el pensamiento de la civilización occidental por casi 1700 años. En su obra “Física”, aborda distintos aspectos de la naturaleza que ahora englobaríamos en lo que son las “ciencias naturales”. En ella aborda el problema del movimiento y su asociación con el espacio, el vacío y el tiempo. Otros libros de Aristóteles son “Del cielo”, “De la meteorología”, “Los lugares de los vientos”, etc.

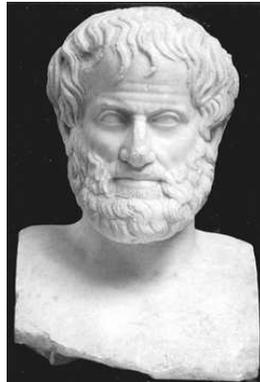


Figura 1.4: Aristóteles

El siglo tercero antes de Cristo tuvo a uno de los genios más grandes de la humanidad: Arquímedes (287 - 212 a.C.), originario de la colonia griega de Siracusa, en la actual Sicilia. La leyenda dice que, estando concentrado en un problema geométrico de círculos, fue muerto por un soldado romano que no lo reconoció, durante el asalto a Siracusa. En el campo de las Matemáticas, aunque abordó todas sus ramas, se dedicó principalmente a la Geometría. Fue precursor del cálculo integral (método de exhaustión). En la Mecánica, se le atribuyen numerosas invenciones, no todas conocidas, entre las que se encuentra la rueda dentada, las leyes de las palancas, etc. Se dice que puso en práctica sus conocimientos

¹En su libro, Hipócrates hace la asociación entre salud y condiciones ambientales. Ya al comienzo de su libro relaciona la salud con la calidad del agua, tema que en la actualidad aborda la ingeniería sanitaria. Resulta interesante leer algunas ideas erradas respecto a las propiedades físicas del agua. Por ejemplo, al final del Capítulo IX propone un experimento, en el que se derrite una cierta cantidad de agua congelada, encontrándose que su volumen ha disminuido. Hipócrates explica la diferencia de volumen del agua en sus estados líquido y sólido porque al congelarse se pierde “las partes más livianas y ligeras” del agua. Al parecer no hizo el experimento inverso, congelar nuevamente la misma cantidad de agua, donde encontraría que el volumen aumentaba nuevamente y se recuperaría “las partes más livianas y ligeras”. *Hippocrates, Vol. I, The Loeb Classical Library, William Heinemann Ltd., London, 1923 (Reprinted 1957), pág. 95.*

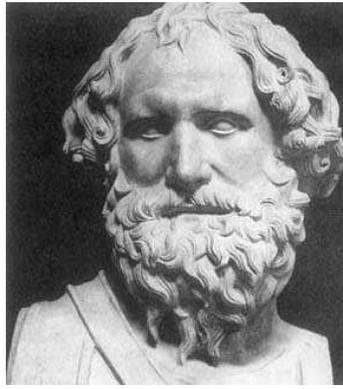


Figura 1.5: Arquímedes

para la defensa de Siracusa y se le atribuye haber destruido embarcaciones romanas concentrando los rayos del Sol en ellas mediante espejos parabólicos, volcándolas mediante garfios accionados por poleas, etc. (**Figura 1.6**). Se le atribuye ser el inventor del tornillo sin

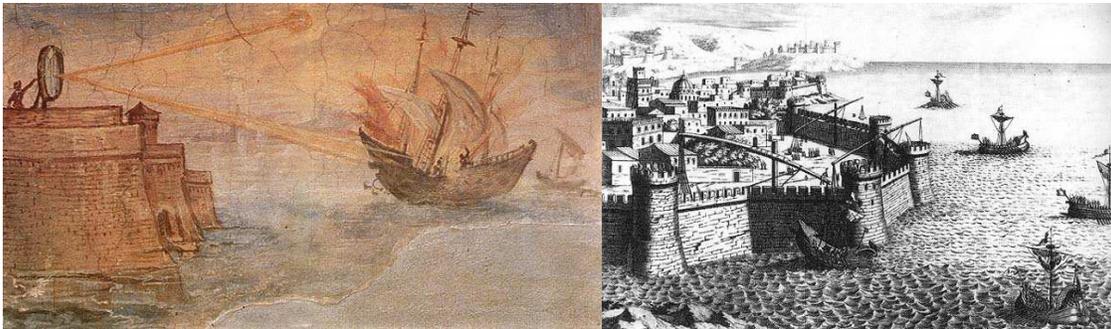


Figura 1.6: Uso de principios físicos usados por Arquímedes en la defensa de Siracusa.

fin (o tornillo de Arquímedes) y usarlo para elevar agua (**Figura 1.7**), aunque es probable que haya tomado la idea de Medio Oriente o Egipto. Sin embargo, su contribución más notable, y que se mantuvo prácticamente como el único desarrollo de la mecánica de fluidos, es el haber formulado y desarrollado la hidrostática, de la cual se derivan, como casos particulares, el principio de Arquímedes (la fuerza vertical ascendente que un líquido ejerce a un cuerpo sumergido es igual al peso del volumen de líquido desplazado), las superficies de igual presión en la Tierra corresponden a sectores de superficies esféricas, etc. La estabilidad de cuerpos flotantes Arquímedes la obtuvo dividiendo las diferentes geometrías en delgadas franjas (¡cálculo integral!), a las que determinaba sus centros de gravedad y carena. El 20



Figura 1.7: Tornillo de Arquímedes. La imagen de la derecha corresponde al sistema de utilizado en una planta de tratamiento de agua en Memphis. La planta de tratamiento de La Farfana emplea un sistema similar, pero se encuentra cubierto, por lo que no se aprecia el tornillo sin fin.

de octubre de 1998 la casa Christies' s de Nueva York remató en dos millones de dólares un palimpsesto bizantino del siglo X, considerado la más antigua y auténtica copia de algunas de las obras de Arquímedes. Contiene un compendio de sus tratados matemáticos e incluye la única copia del tratado sobre el “Método de los teoremas mecánicos”. Este palimpsesto es la única fuente en griego del original del tratado “Sobre los cuerpos flotantes”, en los que Arquímedes explora la física de la flotación y da la demostración formal del principio de empuje (**Figura 1.8**).



Figura 1.8: Manuscrito palimpsesto del siglo X con el tratado “Sobre los cuerpos flotantes” de Arquímedes.

Habrá que esperar hasta el renacimiento para encontrar avances significativos en la mecánica de fluidos. Destaca Leonardo da Vinci (1452-1519) cuyas contribuciones a la

mecánica de fluidos e hidráulica están en su tratado “Del moto e misura dell’acqua” (Del movimiento y medida del agua), y cubre flujos con superficie libre, ondas, vórtices, chorros, etc. Da Vinci es el precursor de la visualización del flujo, para lo cual utilizaba semillas como trazadores y dibujaba su movimiento, determinando los patrones de flujo. (**Figura 1.9**).

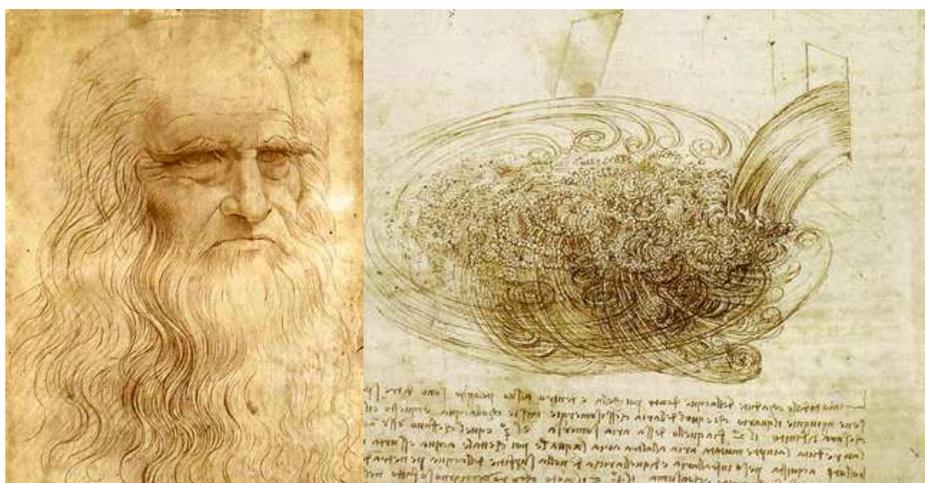


Figura 1.9: Leonardo da Vinci (autorretrato) y página de su tratado sobre el movimiento del agua, con sus vórtices y ondas generadas por obstáculos.

Otros nombres que resaltan en el desarrollo de la mecánica de fluidos y que oiremos a menudo a lo largo del curso son los de Isaac Newton (1643-1727), genio de la talla de Arquímedes, entre cuyos aportes destacan su segunda ley, la que permite describir el movimiento de los fluidos según las fuerzas que actúan, la ley constitutiva para los fluidos, además de sus desarrollos en el cálculo diferencial e integral. También están Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783, Claude Louis Marie Henry Navier (1785-1836), George Gabriel Stokes (1819-1903), Jean Le Rond d’Alembert (1717-1783), Pierre Simon de Laplace (1749-1785), Jean Louis Marie Poiseuille (1799-1869), John William Rayleigh (1842-1919), Maurice Couette (1858-1943), Osborne Reynolds (1842 -1912), Joseph Valentin Boussinesq (1842 -1929), Ludwig von Prandtl (1875-1953), Geoffrey Ingram Taylor (1886-1975) y muchos otros cuya contribución a la mecánica de fluidos conoceremos este semestre.

Básicamente estudiar la dinámica de los fluidos no es más que la aplicación de los principios de la física (conservación de la materia, segunda ley de Newton, primera de la termodinámica) a los fluidos, los que caracterizaremos como un medio continuo, con ciertas leyes constitutivas específicas que especifican su comportamiento interno cuando son sometidos a fuerzas. Esto lo haremos a lo largo del curso, caracterizando y definiendo primero qué entenderemos por fluido, luego aplicando las leyes de la física a un fluido cuando las partículas que lo constituyen no se encuentran en movimiento relativo (hidrostática), para

luego dedicar la mayor parte del tiempo al movimiento de los fluidos (cinemática y dinámica).

1.2 Definición de un fluido

La definición de la palabra fluido que entrega la Real Academia de la Lengua Española (RAE) es “se dice de las sustancias en estado líquido o gaseoso”, vale decir, un fluido no es un sólido. Afortunadamente, la definición de la palabra sólido que entrega la RAE es algo más útil para los objetivos del curso, definiendo un sólido como “dicho de un cuerpo que, debido a la gran cohesión de sus moléculas, mantiene forma y volumen constantes”. De esta forma, si bien existen algunas diferencias menores, lo que veremos durante este semestre es igualmente válido para analizar y comprender tanto el comportamiento de un gas (aire), como de un líquido (agua); y que una primera diferenciación entre fluidos y sólidos se puede realizar, cualitativamente, a partir de la actividad a nivel molecular en:

Tabla 1: Algunas diferencias cualitativas a nivel molecular entre sólidos y fluidos

	Sólido	Fluido
Espaciamiento entre moléculas	Pequeño	Grande
Fuerzas de cohesión	Grandes	Pequeñas
Movilidad de las moléculas	Pequeña	Grande

Por otro lado, el diccionario Inglés de Oxford define un fluido como una “sustancia líquida o gaseosa que no tiene forma definida y que cede fácilmente ante la acción de fuerzas externas”. Sin considerar momentáneamente la parte de la definición relacionada con la acción de fuerzas externas, definiremos a un fluido como una sustancia líquida o gaseosa que no tiene forma definida, adquiriendo así la forma del recipiente que lo contiene. En caso que no exista un recipiente contenedor, el fluido naturalmente se deforma y fluye o escurre hasta alcanzar una nueva “situación de equilibrio”.

Para poder analizar en detalle cómo se diferencia la respuesta de un fluido y de un sólido ante la acción de fuerzas externas, definiremos primero un volumen de control, V , infinitesimal de dimensiones dx , dy y dz (**Figura 1.10A**). Es así que sobre cada una de las caras de V (caras que llamaremos e , w , n , s , t y b tal y como se definen en la **Figura 1.10B a D**) se identifican dos tipos de fuerzas actuando: fuerzas normales y fuerzas tangenciales. Para poder realizar un análisis que no sea dependiente de las dimensiones del problema, tanto las fuerzas normales como tangenciales actuando sobre las caras de V las expresaremos como fuerzas por unidad de superficie, y que llamaremos esfuerzos normales (n_i) y esfuerzos tangenciales o de corte (τ_{ij}). El sub-índice i toman valores e , w , n , s , t y b mientras que el sub-índice j toma valores de x , y , y z , tal que i indica la cara donde se aplica la fuerza y j indica en cuál dirección se aplica. Por ejemplo, n_e denota al esfuerzo normal a la cara e de V (positivo según x), mientras que τ_{nz} es el esfuerzo tangencial a la cara n que actúa en

la dirección z . El motivo para diferenciar entre esfuerzos normales y tangenciales o de corte es relativamente obvio, esfuerzos normales están directamente relacionados con cambios del volumen total de V (**Figura 1.11A** para el caso de fuerzas de compresión), mientras que los esfuerzos tangenciales se relacionan con deformación angular y/o rotación de V (**Figura 1.11B**).

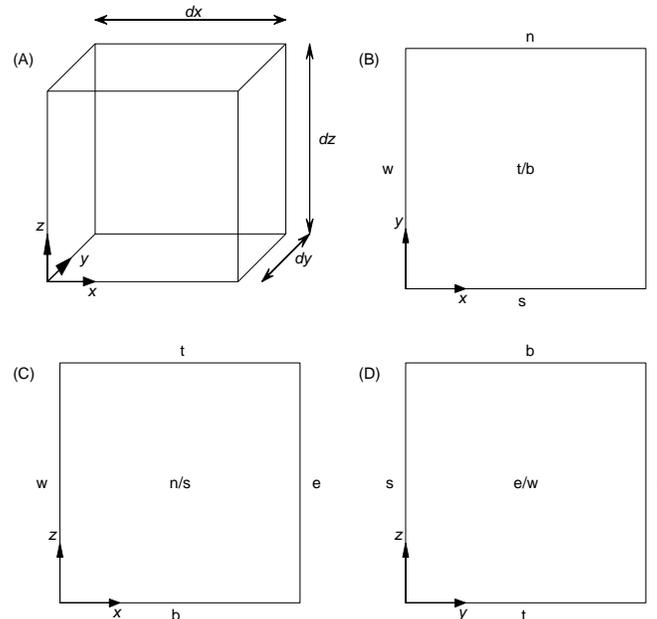


Figura 1.10: Definición de volumen de control V y notación utilizada.

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores, diremos que un sólido puede resistir la acción de fuerzas normales tanto de compresión como de tracción, mientras que un fluido sólo es capaz de resistir fuerzas normales de compresión. Intuitivamente, podríamos decir que mientras es posible estirar un material sólido elástico, ello, por el contrario, no es posible en el caso de un fluido. Por ejemplo un gas siempre está comprimido y la presión del gas representa el esfuerzo de compresión, como se discutirá más adelante en el curso. Si se reduce indefinidamente la presión del gas, se llega a una condición de presión nula (asociada a $0^\circ K$ de temperatura tal como veremos en el siguiente capítulo) y a partir de ese punto ya no se puede seguir reduciendo la presión para ejercer tracción. En líquidos, al reducir la presión lo suficiente se produce un cambio de fase a estado gaseoso, de modo que éstos tampoco pueden ser traccionados. Esta diferencia radica en que las moléculas de un sólido se encuentran unidas entre sí, de manera que el movimiento de una molécula en particular induce el movimiento de todas las moléculas de su entorno, tirando y empujando a sus moléculas vecinas. Por el contrario, las moléculas de fluidos se encuentran separadas unas de las otras, y por lo tanto la interacción se reduce solo al caso en que dos moléculas choquen

o se empujen mutuamente.

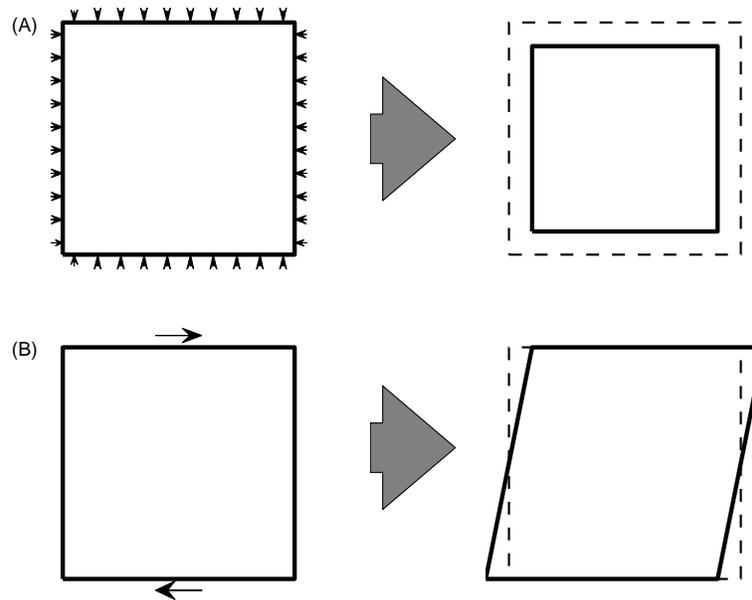


Figura 1.11: Ejemplificación de fuerzas normales (A) y tangenciales (B) actuando sobre un volumen de control V .

Por otro lado, si ejercemos un esfuerzo tangencial, τ , sobre un sólido veremos que para el rango de deformación elástica, la deformación angular de V , γ [-] (**Figura 1.12**), es proporcional a la magnitud del esfuerzo tangencial ($\gamma \sim \tau$); sin embargo, si ejercemos el mismo esfuerzo de corte sobre un fluido, γ varía continuamente en el tiempo. Por ejemplo, consideremos un problema de dos placas paralelas horizontales que se extienden indefinidamente, separadas una de la otra por una distancia ϵ . Si entre ambas placas hay un fluido lubricante (**Figura 1.13**), qué sucede si ejercemos un esfuerzo τ sobre la placa superior, y la placa inferior la dejamos fija?: la placa superficial comienza a desplazarse en respuesta a τ , la placa inferior no se mueve por construcción del problema, y por lo tanto el fluido lubricante debe responder de manera tal de compatibilizar el movimiento relativo de ambas placas. Para esto, introducimos el principio denominado condición de borde de “no resbalamiento”, que dice que moléculas de fluido en contacto con sólidos adquieren la velocidad del sólido. En este caso, las partículas de fluido en $y = 0$ se encuentran en reposo, mientras que el fluido en $y = \epsilon$ se desplaza solidario a la placa superior. Notar que esta condición de borde de no resbalamiento es también válida para las velocidades perpendiculares a las placas, las que son iguales a 0, pero que en dicho caso hablamos de condición de borde de no penetración.

De acuerdo con Newton, es intuitivo pensar que si bien la placa se acelerará en un comienzo, para algún tiempo lo suficientemente grande el fluido ejercerá un esfuerzo igual y

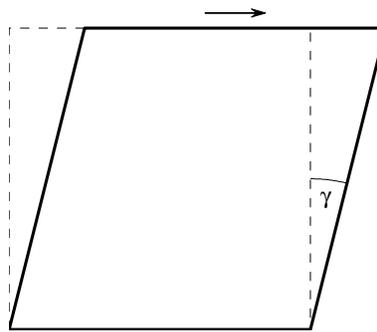


Figura 1.12: Definición de deformación angular producto de acción de un esfuerzo de corte.

contrario a τ , tal que la placa superior se desplaza con velocidad constante $U > 0$. Si consideramos, además, que ϵ es lo suficientemente pequeño y el fluido tiene ciertas características especiales (llamado fluido Newtoniano, como se discutirá en el siguiente capítulo), podemos decir que la velocidad del fluido varía linealmente entre ambas placas, y entonces podemos medir cómo es la deformación angular del volumen de control que en $t = t_o$ era cuadrado con $dx = dy = \epsilon$. Es así que para cualquier tiempo $t > t_o$, vemos que la deformación angular del volumen de control V varía continuamente en el tiempo dado que las esquinas ne y nw se desplazaron una distancia $U(t - t_o)$. En el capítulo siguiente veremos cómo se relacionan entre sí la velocidad de la placa superficial U , el espesor ϵ y las propiedades del fluido (estudio llamado reología: “Estudio de los principios físicos que regulan el movimiento de los fluidos” según la RAE).

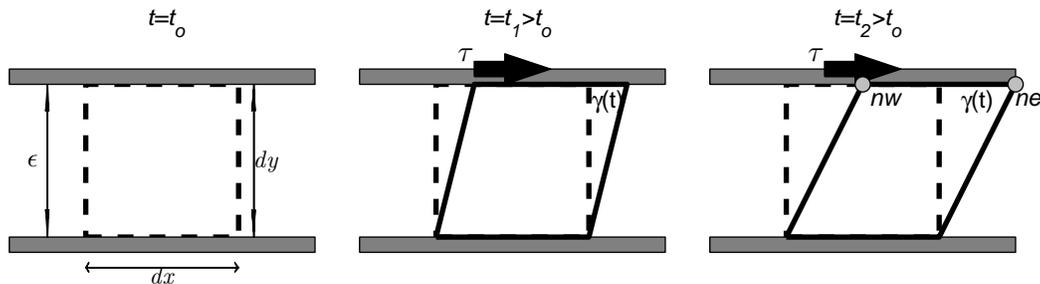


Figura 1.13: Ejemplo para ilustrar evolución temporal de deformación angular de V producto de un esfuerzo de corte τ .

Finalmente, si bien líquidos y gases son fluidos, la principal diferencia que existe entre ambos radica en el modo en que responden ante esfuerzos normales, en particular, al grado

de compresibilidad de V ante la acción de esfuerzos normales. Por un lado consideraremos a los gases como un fluido compresible, mientras que para la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, los líquidos pueden considerarse incompresibles. Es importante mencionar que usualmente el ejercicio de medir el grado de compresibilidad de un fluido se centra en analizar su densidad, masa por unidad de volumen, que toma valores característicos de la **Tabla 2**

Tabla 2: Valores característicos de densidad de fluidos.

Fluido	Densidad [kg m^{-3}]
Agua	1000
Aire	1.2
Alcohol	780
Mercurio	13580

1.3 Sistema de Unidades²

1.3.1 Importancia de los sistemas de medición

La modelación de fenómenos físicos requiere efectuar observaciones. Estas consisten en la asignación de valores numéricos a ciertas variables.

Los modelos de fenómenos físicos son relaciones funcionales o expresiones matemáticas donde intervienen estas variables.

Las variables son concretas o dimensionales o bien abstractas o adimensionales.

Las variables concretas tienen asociadas magnitudes y dimensiones. La magnitud depende del sistema de unidades usado.

1.3.2 Algunas definiciones generales

Cantidad en el sentido general: Propiedad asociada a fenómenos, cuerpos o sustancias que pueden ser cuantificadas para ser asignadas a un fenómeno cuerpo o sustancia en particular. Ejemplos: masa y carga eléctrica.

Cantidad en el sentido particular: Propiedad cuantificable o asignable atribuida a un fenómeno, cuerpo o sustancia en particular. Ejemplos: la masa de la luna, la carga eléctrica del protón.

Cantidad física: Es una cantidad que puede ser usada en las ecuaciones matemáticas de la ciencia y la tecnología.

²Sección redactada por Cristian Ihle

Unidad: Es una cantidad física particular, definida y adoptada por convención, con las que otras cantidades particulares del mismo tipo son comparadas con el fin de expresar su valor.

Unidad fundamental: Es aquella unidad que constituye el fundamento del sistema de unidades. Se supone que todas las unidades base son independientes entre sí.

Unidad derivada: Es aquella que puede ser expresada en términos de las unidades base, mediante multiplicaciones y divisiones de las mismas. Ciertas unidades derivadas tienen nombres y símbolos especiales, los que pueden ser usados en combinación con aquellos para las unidades base u otras unidades derivadas.

1.3.3 Aplicación de los sistemas de unidades

Comúnmente los sistemas de unidades se clasifican en dos grupos, según su campo de aplicación:

- (a) Físicos o absolutos
- (b) Técnicos o ingenieriles.

Sistemas físicos: Sus unidades fundamentales son la longitud [L], la masa [M], el tiempo [T] y la temperatura [Θ].

Algunas unidades derivadas comunes son la fuerza [F], el trabajo [W], el esfuerzo [σ], la potencia [P] y la presión [p].

Sistemas técnicos: Sus unidades fundamentales son la longitud [L], la fuerza [F], el tiempo [T] y la temperatura [Θ].

Existen distintas convenciones para nombrar una misma unidad. Las más comunes son los sistemas MKS (metro-kilógramo-segundo), y el sistema inglés (pulgada-libra-segundo). Por otro lado, está el sistema CGS (centímetro-gramo-segundo). El sistema SI es el más ampliamente aceptado en la actualidad.

Las unidades fundamentales del sistema CGS son múltiplos de aquellas del sistema MKS. En este caso se diría que MKS y CGS pertenecen a la misma clase de sistemas de unidades porque ellos difieren solo en su magnitud, pero no en su naturaleza física.

1.3.4 Definiciones de unidades en el sistema SI

Estas definiciones se basan en la Novena conferencia general de pesos y medidas, 1948:

- metro [m]: Es la longitud de la ruta recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo igual a $1/299.792.458$ de un segundo.
- kilogramo [kg]: Es la unidad de masa. Es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo (Oficina Internacional de Pesos y Medidas, Sévres, Francia).

- segundo [s]: Es la duración de 9.192.631.770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos desde el estado base de un átomo de Cesio-133.
- kelvin [°K]: Es una unidad de temperatura termodinámica. Corresponde a la fracción $1/273.16$ de la temperatura termodinámica del triple punto del agua.
- ampere [A]: Es la corriente constante que, al ser mantenida entre dos conductores paralelos de largo infinito, de sección circular constante, aislados 1 metro en vacío, producirán entre estos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} Newton por metro de longitud.

Otras unidades base del sistema SI, de menos interés en mecánica de fluidos son el mol y la candela.

1.3.5 Resumen de unidades derivadas

La **Tabla 3** presenta un resumen de las unidades derivadas más comunes.

Tabla 3: Unidades del sistema físico

Variable	Unidad CGS	Unidad SI
Fuerza [F]	dina = gr cm s ⁻²	Newton (N) = kg m s ⁻²
Trabajo [W]	erg = dina cm	Joule (J) = N m
Esfuerzo [σ]	dina cm ⁻²	N m ⁻²
Potencia [P]	erg s ⁻¹	Watt (W) = J s ⁻¹
Presión [p]	dina cm ⁻²	Pascal (Pa) = N m ⁻²

Otras equivalencias importantes:

$$1 \text{ cal} = 4.18674 \text{ J} \quad (1.1)$$

$$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J} \quad (1.2)$$

Para las unidades técnicas se deriva unidades de fuerza de la siguiente forma:

$$1 \text{ gr peso } (\vec{g}\vec{r}) = 1\vec{g} \times \text{gr} = 980 \text{ gr cm s}^{-2} = 980 \text{ dina} \quad (1.3)$$

$$1 \text{ kg peso } (\vec{k}\vec{g}) = 1\vec{g} \times \text{kg} = 9.8 \text{ kg m s}^{-2} = 9.8 \text{ N} \quad (1.4)$$

Por otro lado,

$$1 \text{ Watt} = 1 \text{ N ms}^{-1} = 1 \times 1000 \text{ gr} \times 100\text{cm s}^{-1} = 10^7 \text{ erg s}^{-1} \quad (1.5)$$

Tabla 4: Unidades del sistema técnico

Variable	Unidad MKS
Masa [M]	1 UTM = 1 $\vec{kg} \ s^2 m^{-1}$
Trabajo [W]	$\vec{kg} \ m$
Potencia [P]	$\vec{kg} \ m \ s^{-1}$

Nota: $1UTM = \vec{kg} \ s^2 m^{-1} = 9.8 \ N \ s^2 \ m = 9.8 \ kg$

En la **Tabla 4** se presentan las unidades del sistema técnico.

Un concepto que debe tenerse en cuenta en el trabajo con magnitudes dimensionales es el de homogeneidad dimensional de las ecuaciones de la física. Las ecuaciones que modelan fenómenos físicos deben ser dimensionalmente homogéneas, es decir, las dimensiones de ambos miembros de la ecuación deben ser las mismas.

1.3.6 Algunas recomendaciones de uso del sistema SI

Se debe escribir las unidades SI en letras no cursivas, en minúsculas, a menos que provengan de un nombre propio. Por ejemplo, kg, J (viene de Joule), s, W (viene de Watt).

Los símbolos no se alteran al ser usados en plural. Por ejemplo, 1m, 10m. Las unidades SI no deben ser seguidas por un punto, (a menos que sea necesario un punto seguido o aparte).

Capítulo 2

Propiedades de los fluidos

Para poder caracterizar un fluido en particular es necesario conocer sus propiedades, vale decir, las constantes propias del fluido asociadas al estado en que se encuentre, tal que sea posible describir y cuantificar su comportamiento frente a cambios en las condiciones del medio. En particular, centraremos nuestra atención en las propiedades de transporte, las propiedades termodinámicas, la presión de vapor y la tensión superficial.

2.1 Propiedades de transporte

Se podría entender como propiedades de transporte aquellas características de los fluidos que permiten que la información de lo que ocurre en un sitio, sea transmitida en el espacio debido a actividad molecular, la que tiene un carácter aleatorio y escalas espaciales microscópicas. Sin lugar a dudas, un método de transporte más efectivo, es el movimiento propio, macroscópico, del fluido, sin embargo, este método de transporte es dependiente de las condiciones y características del escurrimiento o flujo y no de las propiedades del fluido.

Otras formas de transportar información es mediante ondas, lo cual implica transporte de energía pero no de masa. Por ejemplo, el Tsunami del terremoto de Valdivia de 1960 generó una onda que viajó con una rapidez proporcional a \sqrt{gh} (donde g es la aceleración de gravedad y h la profundidad media del mar), que al cabo de algunas horas produjo destrucción y muertes en Hawai y Japón. Si bien este mecanismo de transporte es bastante eficiente, no nos dice nada acerca del fluido dado que ni g ni h representan sus propiedades.

Es así que para analizar aisladamente los efectos de las propiedades de transporte de un fluido, necesitamos estudiar casos en que no exista velocidad del mismo en la dirección en la cual nos interesa transportar la información. Por información entenderemos cualquier variable física, tal como masa, calor, energía o momentum. Por ejemplo, retomemos el caso

de dos placas planas paralelas con un fluido entre ellas, visto en el capítulo anterior cuando definimos la condición de borde de no resbalamiento. Supongamos que el sistema ya alcanzó un equilibrio tal que la placa superficial se mueve a una velocidad constante $U > 0$. Dadas las condiciones de borde de no resbalamiento y no penetración, podemos afirmar que existe un perfil de velocidades según x del fluido, $u(y)$, y que la velocidad según y , v , es cero en todo el espacio (**Figura 2.1**). Es así que podemos hacernos tres preguntas válidas: i) por qué el fluido ubicado en $y = \epsilon/2$ debiera moverse?, o bien, cómo es que el fluido en $y = \epsilon/2$ percibe que la placa superficial tiene una velocidad relativa respecto de la placa inferior?, ii) qué sucede con la temperatura en $y = \epsilon/2$ si entrego calor a la placa superficial y iii) qué color tomaría el fluido en $y = \epsilon/2$ si inyecto tinta en el nivel $y = \epsilon$? Cada una de estas preguntas serán contestadas al discutir acerca de la viscosidad (pregunta i), el coeficiente de conducción térmica (pregunta ii), y el coeficiente de transporte de masa (pregunta iii). En todos nuestros análisis supondremos que las placas son horizontales y se extienden indefinidamente en el plano.

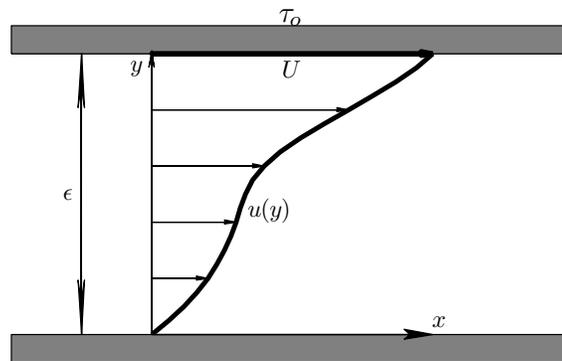


Figura 2.1: Ejemplo de perfil de velocidades para el fluido entre placas.

2.1.1 Viscosidad

Según como enunciamos el problema de las placas paralelas de la **Figura 2.1**, el movimiento de la placa superficial se genera mediante un esfuerzo τ_o . Por otro lado, dado que conceptualmente esperamos un tiempo lo suficientemente largo como para alcanzar una situación permanente (vale decir que no existen cambios en el tiempo de la velocidad de la placa, o lo que es lo mismo, que la placa no tiene aceleración), existe un esfuerzo actuando sobre la placa superficial, con igual magnitud de τ_o pero en sentido contrario (osea igual a $-\tau_o$), tal que el balance de esfuerzos es cero (simple aplicación de la Segunda Ley de Newton considerando que no existen otras fuerzas horizontales en el problema). Dicho esfuerzo es claramente debido al fluido, es decir, representa un esfuerzo resistivo por fricción molecular que el fluido

transmite a la placa. Dado que en la interfaz entre la placa y el fluido debe también existir un balance de fuerzas igual a cero (pero en este caso no porque el flujo sea permanente, sino que porque conceptualmente no existe masa en las interfaces), es fácil ver que el fluido percibe τ_o de igual forma que la placa superficial, lo que nos permite eliminarla de nuestro análisis y centrarnos sobre un volumen de fluido de dimensiones $0 < dy \leq \epsilon$, tal que su cara n se encuentra en $y = \epsilon$ (**Figura 2.2** y note que dx no tiene relevancia alguna en este problema).

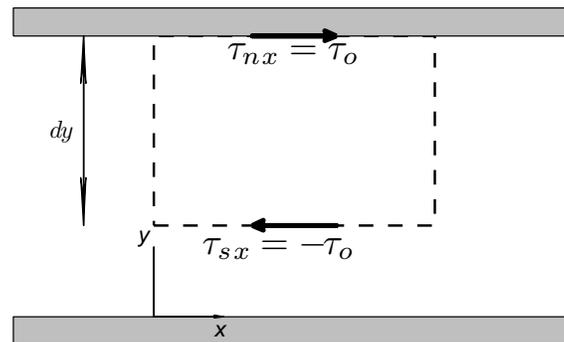


Figura 2.2: Definición de volumen de control para el problema de placas planas paralelas.

Es fácil ver que para cualquier volumen de fluido de espesor dy , el balance de fuerzas según la dirección x entrega que el esfuerzo que actúa en la cara s es $-\tau_0$ (por la Segunda Ley de Newton, notando que el fluido no está acelerado), lo que nos indica que el esfuerzo de corte que se aplica sobre la placa superficial se transmite íntegramente a través del fluido, permaneciendo constante, de manera que la placa inferior siente también el esfuerzo de corte τ_0 , que debiera ser contrarrestado con algún sistema de anclaje sólido para que ésta se mantenga fija (es decir que le transmita un esfuerzo $-\tau_0$). Este tipo de flujos, generados por la sola aplicación de un esfuerzo de corte y en ausencia de otras fuerzas en la dirección paralela a las placas, son conocidos como flujos de Couette.

Sin embargo, a pesar que este resultado es interesante para ilustrar el comportamiento de los fluidos, seguimos sin poder cuantificar y describir bien cómo se relacionan entre sí el esfuerzo de corte τ_0 , la velocidad de la placa superior, U , las propiedades del fluido y el espesor ϵ . Para esto, entraremos en el estudio de la reología de los materiales, palabra que ya definimos en el capítulo anterior, pero que para efectos del curso parafrasearemos como el estudio de cómo se relacionan la “deformación angular” de un volumen de control y el esfuerzo de corte que la genera. Esta definición tiene sentido en el caso de los sólidos, sin embargo, en el caso de los fluidos la deformación angular γ de un volumen de control pierde sentido ya que éstos se deforman continuamente ante la acción de esfuerzos de corte,

lo que produce que γ sea explícitamente una función creciente del tiempo, incluso para el caso permanente, en el que la placa superior y el fluido tienen velocidad constante en el tiempo. Entonces, es conceptualmente más adecuado estudiar la relación entre esfuerzo de corte y la tasa de deformación angular de un volumen de control de fluido definida como:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} \quad (2.1)$$

De esta forma, podemos realizar una serie de experiencias en laboratorio y graficar en un *diagrama reológico* el esfuerzo de corte aplicado versus la tasa de deformación angular de distintos tipos de fluidos. Dependiendo de la forma que toma esa relación entre ambos parámetros, los fluidos se subdividen en fluidos Newtonianos y no Newtonianos (incluyendo entre estos últimos los fluidos plásticos, pseudo-plásticos y dilatantes).

Fluidos Newtonianos

La definición de fluidos Newtonianos proviene de la ley de Newton-Navier, la que expresa que el esfuerzo de corte es directamente proporcional a la tasa de deformación, donde el coeficiente de proporcionalidad es una propiedad del fluido que se denomina coeficiente de viscosidad dinámica:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2.2)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica del fluido.

Por otro lado, es necesario expresar la tasa de deformación angular en función de las propiedades del flujo (del flujo no del fluido). Para esto consideremos un volumen de fluido tal que existe una velocidad relativa entre las caras n y s (**Figura 2.3**). El movimiento relativo entre dichas caras es lo que da lugar a la tasa de deformación angular. Si llamamos $u = u_s$ a la velocidad en s , entonces podemos expresar la velocidad en n , u_n a partir de una expansión en series de Taylor con respecto a aquella en la cara s , considerando sólo el término de primer orden dado que dy es pequeño, tal que:

$$u_n = u_s + \left. \frac{du}{dy} \right|_s dy + \dots \quad (2.3)$$

Usando este resultado vemos que esta velocidad relativa conlleva además un desplazamiento relativo de los vértices ne y se del volumen de control, y por lo tanto una deformación angular de éste. Por ejemplo, si en $t = 0$ tomamos un volumen de control cuadrado tal que $\gamma \equiv 0$, podemos calcular $\Delta\gamma$ para un tiempo Δt , pequeño, como:

$$\tan \Delta\gamma \approx \Delta\gamma = \frac{u_n \Delta t - u_s \Delta t}{dy} = \left. \frac{du}{dy} \right|_s \Delta t, \quad (2.4)$$

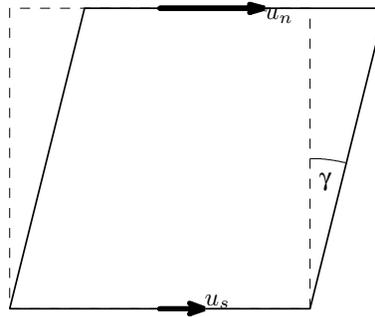


Figura 2.3: Esquema para el cálculo de deformación angular en función de las propiedades del flujo.

entonces, si hacemos tender $\Delta t \rightarrow 0$, se obtiene que

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} \quad (2.5)$$

Considerando la definición de (2.2) y el resultado de (2.5), obtenemos que:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.6)$$

Teniendo en cuenta el resultado de (2.6) podemos ver que el coeficiente de viscosidad dinámica nos entrega una medida de la resistencia del fluido a fluir. Por ejemplo, si fijamos un valor de τ y variamos el fluido, veremos que para un fluido 1 con μ_1 grande (e.g., miel), la tasa a la cual se deforman los volúmenes de control es menor que para un fluido 2 con $\mu_2 \ll \mu_1$ (e.g., agua). Desde un punto de vista intuitivo, el hecho que los volúmenes de control se deformen con mayor o menor facilidad significa que, a medida que nos alejamos de las paredes fijas, las velocidades aumentan más rápidamente para fluidos menos viscosos, y por lo tanto, las máximas velocidades que se alcanzan son mayores que para un fluido más viscoso. Para ejemplificar este hecho intuitivo podemos resolver el problema planteado en las **Figura 2.2**.

Considerando que en (2.6) μ es constante y que de acuerdo al análisis presentado previamente que permitió concluir que τ en cualquier punto del fluido es una constante igual al esfuerzo de corte ejercido en la placa superior, τ_0 , entonces se obtiene:

$$u(y) = \frac{\tau_0}{\mu} y + C_0 \quad (2.7)$$

El valor de la constante de integración, C_0 , queda definido por la condición de borde del problema, $u = 0$ en $y = 0$, por lo tanto $C_0 = 0$, y entonces podemos directamente calcular

la velocidad de desplazamiento de la placa superficial como

$$U = \frac{\tau_0}{\mu} \epsilon. \quad (2.8)$$

Como era de esperarse, la velocidad a la cual se desplaza la placa es proporcional a τ_0 (mayor esfuerzo de corte produce una mayor velocidad), pero es inversamente proporcional a la viscosidad μ , tal que ratificamos la descripción intuitiva que *fluidos más viscosos se mueven más lento*. El hecho que U sea proporcional a ϵ se explica en el hecho geométrico que a medida que este espesor aumenta, la placa superior se aleja de la condición de borde de velocidad nula.

Propiedades de la viscosidad y unidades de medición

En el diagrama reológico que se muestra en la **Figura 2.4**, cada fluido Newtoniano queda representado por líneas rectas, cuya pendiente representa el valor del coeficiente de viscosidad dinámica. Es así que la pendiente de la curva aumenta a medida que la viscosidad del fluido aumenta, de manera que para producir una misma tasa de deformación angular de los volúmenes de control es necesario aumentar el esfuerzo de corte. Un caso particular que se ve en la **Figura 2.4**, es aquel asociado a $\mu = 0$, conocido como fluido ideal, en el que no existen esfuerzos de corte. En este caso el fluido no se deforma, es decir no existe movimiento relativo de porciones de fluido o equivalentemente que no existe fricción de origen molecular. Obviamente, en la naturaleza no existe un fluido ideal, ya que hemos definido un fluido en términos de la viscosidad como propiedad que lo distingue de un sólido en su comportamiento mecánico. En otras palabras, $\mu = 0$ no tiene sentido físico. No obstante, más adelante en el curso veremos que en ciertos casos resulta conveniente introducir la suposición simplificatoria que la viscosidad no es relevante para describir el comportamiento del fluido. En esos casos el fluido puede considerarse ideal con fines de resolver el problema del punto de vista práctico.

Las dimensiones de la viscosidad dinámica pueden determinarse a partir de la ecuación de Newton-Navier (2.2) y el resultado de (2.5). Considerando la fuerza como unidad fundamental, entonces las dimensiones de la viscosidad dinámica en el sistema técnico son:

$$[\mu] = \left[\frac{\tau}{\frac{\Delta u}{\Delta y}} \right] = \frac{[F][L]^{-2}}{[L][T]^{-1}[L]^{-1}} = [F][L]^{-2}[T] \quad (2.9)$$

Considerando ahora la masa como unidad fundamental (sistema físico), entonces:

$$[\mu] = \frac{[M]}{[L][T]} \quad (2.10)$$

La viscosidad dinámica de los fluidos Newtonianos depende tanto de la temperatura como de la presión del fluido, aunque su relación con la presión es poco importante. Como

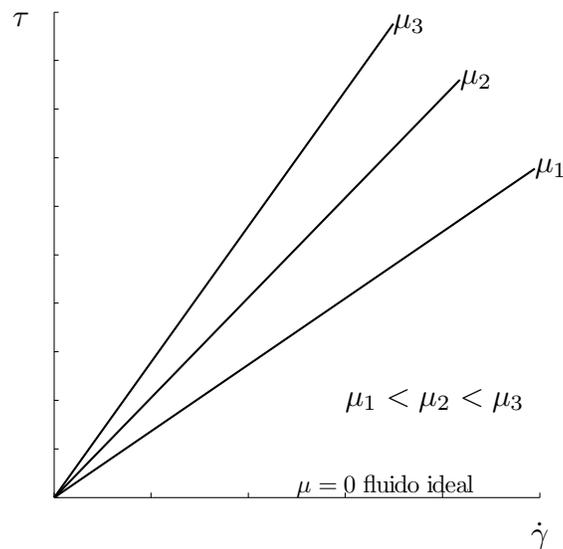


Figura 2.4: Diagrama reológico para fluidos Newtonianos de viscosidad dinámica μ .

regla genérica, en líquidos μ disminuye a medida que la temperatura aumenta, mientras que en gases μ crece con la temperatura. La **Figura 2.5** muestra las curvas de la viscosidad dinámica del agua y el aire en función de la temperatura, donde además introducimos la unidad propia (CGS) de medida de la viscosidad dinámica, el poise (P), que se define como $1 \text{ P} = 1 \text{ gr cm}^{-1}\text{s}^{-1}$, aunque es más común utilizar el centipoise ($1 \text{ cP} = 10^{-2} \text{ P}$) como unidad para expresar la viscosidad dinámica, dado que la viscosidad dinámica del agua a 20°C es igual a 1 cP.

Finalmente, es frecuente que en las ecuaciones de la mecánica de fluidos aparezca el cociente entre la viscosidad dinámica y la densidad, propiedad que se denomina viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.11)$$

cuyas dimensiones son $[\nu] = [L]^2[T]^{-1}$. En unidades CGS, la unidad de ν es $\text{cm}^2 \text{ s}^{-1}$ y se denomina Stokes. En unidades MKS, ν se expresa en $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$, tal que $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} = 10^4 \text{ Stokes}$.

Fluidos no-Newtonianos: plásticos, pseudo-plásticos y dilatantes

Un segundo grupo de fluidos es el de los fluidos no-Newtonianos, que incluye a los fluidos plásticos, pseudo-plásticos y dilatantes.

Tanto los fluidos plásticos como pseudo-plásticos se caracterizan por el hecho que para

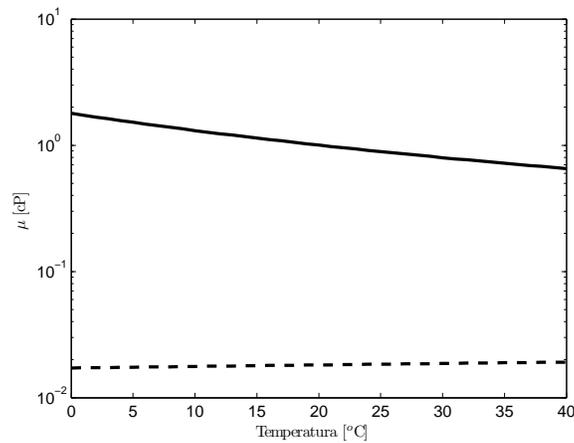


Figura 2.5: Viscosidad dinámica de agua (línea continua) y aire (línea segmentada) en función de la temperatura.

esfuerzos de corte inferiores a un cierto límite, la tasa de deformación es muy pequeña (en el caso de los pseudo-plásticos) o simplemente nula (en el caso de los plásticos). Este valor límite o crítico del esfuerzo de corte se denomina esfuerzo de fluencia, τ_c , tal que para $\tau < \tau_c$ el fluido se comporta como un sólido mientras que para $\tau > \tau_c$ el fluido se comporta como tal, con una tasa de deformación angular que aumenta con el valor de τ . El denominado fluido plástico-ideal o plástico de Bingham tiene un esfuerzo de fluencia τ_c tal que para esfuerzos de corte bajo el cual no existe deformación y para esfuerzos de corte sobre aquel el fluido se comporta linealmente, es decir como un fluido Newtoniano (**Figura 2.6**). La reología de un fluido plástico de Bingham lo podemos representar, por lo tanto, como:

$$\tau = \tau_c + \mu \dot{\gamma} = \tau_c + \mu \frac{du}{dy} \quad (2.12)$$

Para los fluidos pseudo-plásticos o plásticos reales, la tasa de deformación aumenta a medida que aumentamos el esfuerzo de corte (**Figura 2.6**), y son posibles de modelar como:

$$\tau = k (\dot{\gamma})^n = k \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (2.13)$$

donde $n < 1$ y k son constantes características del fluido. Esto se puede interpretar como que estos fluidos se vuelven menos viscosos a medida que aumenta el esfuerzo de corte.

Los fluidos dilatantes, por otro lado, se vuelven más viscosos y, por lo tanto, tienden a deformarse más lentamente a medida que aumenta el esfuerzo de corte (ver **Figura 2.4**). Al igual que para un fluido pseudo-plástico, la relación entre esfuerzo de corte y tasa de

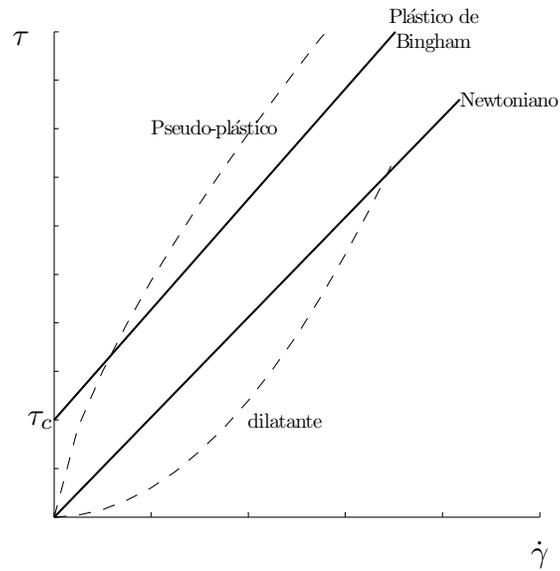


Figura 2.6: Diagrama reológico para diferentes tipos de fluidos.

deformación angular para un fluido dilatante se puede modelar como:

$$\tau = k (\dot{\gamma})^n = k \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (2.14)$$

donde n y k son también constantes características del fluido, pero en este caso $n > 1$.

Finalmente, si resolvemos el problema de las placas planas paralelas para cada uno de estos fluidos, se obtiene que para un plástico de Bingham no existe movimiento del fluido si $\tau < \tau_c$. Por el contrario, si $\tau > \tau_c$ entonces el fluido entre placas se comporta como un fluido Newtoniano, aunque la velocidad de la placa superficial U es ahora igual a:

$$U = \frac{\tau - \tau_c}{\mu} \epsilon \quad (2.15)$$

Para fluidos pseudo-plásticos o dilatantes, se cumple que el perfil de velocidades $u(y)$ es lineal, al igual que para el caso de fluido Newtoniano y plástico de Bingham, donde

$$u(y) = \left(\frac{\tau}{k} \right)^{1/n} y \quad (2.16)$$

2.1.2 Coeficiente de conducción térmica (transporte de calor)

Consideremos la misma geometría de las placas planas paralelas, sin embargo nos olvidaremos del esfuerzo de corte que vimos en el punto anterior sobre la viscosidad, e impondremos una diferencia de temperatura $\Delta T > 0$, pero relativamente pequeña, entre las placas, tal que T_N , la temperatura de la placa superficial, sea mayor que la de la placa inferior (**Figura 2.7**). La pregunta es, cuál es la distribución de temperatura en el fluido lubricante?

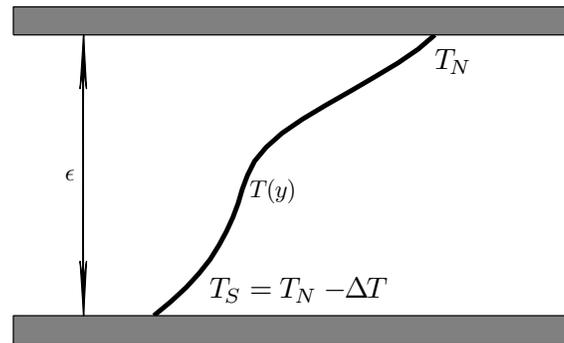


Figura 2.7: Definición del problema para definir el coeficiente de conducción térmica.

Dado que no existe movimiento (velocidad) del fluido que pueda transportar el calor, el transporte de calor en estas condiciones se debe a la conducción térmica (calor transmitido por actividad molecular), que transporta calor de zonas de mayor temperatura a zonas de menor temperatura, y se expresa como:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T \quad (2.17)$$

donde \vec{q} es el flujo de calor por unidad de superficie (vector), κ es el coeficiente de conductividad térmica (escalar, propiedad del fluido), y ∇T es el gradiente de la temperatura (vector). La ecuación (2.17) es conocida como la *Ley de Fourier*.

Dada esta definición podemos calcular cómo varía la temperatura en la dirección y (**Figura 2.7**), para lo cual consideraremos condiciones permanentes, es decir que la distribución de temperatura no varía en el tiempo. Bajo estas condiciones es posible ver que el flujo de calor permanece constante en y ya que, en caso contrario, habría zonas que acumularían calor en el tiempo, mientras que otras lo perderían continuamente, violando así el supuesto de condiciones permanentes. Es así que, si q_y es el flujo de calor en la dirección y , constante, entonces

$$q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.18)$$

y por lo tanto,

$$T(y) = -\frac{q_y}{\kappa} y + C_1 \quad (2.19)$$

donde C_1 se obtiene de las condiciones de borde del problema, es decir, $T(y = \epsilon) = T_N$ o bien, $T(y = 0) = T_N - \Delta T$. Dada la forma de cómo se enunció el problema, ambas condiciones de borde son necesarias ya que el flujo de calor q_y no es un dato. Por lo tanto, al reemplazar ambas condiciones de borde para obtener el valor de C_1 y q_y , se llega finalmente a:

$$T(y) = T_N - \frac{\Delta T}{\epsilon} (\epsilon - y) \quad (2.20)$$

y que

$$q_y = -\kappa \frac{\Delta T}{\epsilon} \quad (2.21)$$

Cabe mencionar que este perfil lineal de temperatura es válido si la diferencia de temperaturas ΔT es pequeña, ya que para ΔT grande otros procesos entran a gobernar la dinámica. En particular, la temperatura del fluido define en gran medida su densidad y coeficiente de conducción térmica, de manera que cambios grandes en la temperatura pueden inducir reorganización del fluido ya que, en palabras comunes, *fluidos más densos tienden ubicarse más abajo en la columna de fluido*.

Por último, las dimensiones del coeficiente de conducción térmica κ quedan determinadas al reconocer que el flujo de calor es, por definición, energía por unidad de tiempo y por unidad de superficie, por lo tanto:

$$[\kappa] = \frac{[M] [L]}{[T]^3 [\Theta]} \quad (2.22)$$

con $[\Theta]$ unidades de temperatura.

2.1.3 Coeficiente de difusión de masa (transporte de masa)

De igual forma que para la conducción de calor, el transporte de masa de un compuesto cualquiera en ausencia de movimiento del fluido es desde zonas de mayor concentración a zonas de menor concentración, y dicho flujo másico queda expresado a partir de la *Ley de Fick*:

$$\vec{m} = -\rho D \nabla C \quad (2.23)$$

donde \vec{m} es el flujo másico por unidad de superficie $[M] [T]^{-1} [L]^{-2}$, ρ es la densidad de la solución $[M] [L]^{-3}$, D el coeficiente de difusión de masa, y C la concentración del compuesto definida como la razón entre la masa del compuesto y la masa de la solución (fluido más compuesto), que, por lo tanto, resulta ser adimensional (es decir, no tiene dimensiones). Es así que las dimensiones del coeficiente de difusión son $[D] = [L]^2 [T]^{-1}$, iguales a las de la viscosidad cinemática.

Consideremos, en analogía a los problemas resueltos previamente con dos placas paralelas, un sistema en el que existe un flujo de masa (por ejemplo tinta u otro trazador) que ingresa uniformemente a través de la placa inferior (suponiendo que ésta es porosa, por ejemplo). Podemos suponer que este flujo másico es muy lento de modo que no se genera un movimiento del fluido. En este caso la masa es difundida por acción molecular y el flujo másico (desde la placa inferior a la superior) se debe a la diferencia de concentraciones que existe en el fluido, tal que la concentración de masa es mayor en la placa inferior que en la placa superior. A partir de los análisis realizados hasta ahora, no es difícil deducir que la concentración $C(y)$ varía linealmente entre las dos placas (se propone demostrar esta afirmación).

Teniendo en cuenta los análisis anteriores, es posible complementar brevemente la discusión acerca de la viscosidad, mencionando que los esfuerzos de corte no son más que un transporte o flujo de momentum (velocidad) encargados de transportarlo, por acción molecular (fricción viscosa), desde zonas con mayor momentum a zonas con menor momentum. Así, la viscosidad, el coeficiente de conducción térmica y el coeficiente de difusión de masa, pueden ser interpretados como propiedades de transporte molecular, tal que si el flujo de una propiedad es proporcional al gradiente de otra, dichas propiedades corresponden al factor de proporcionalidad correspondiente.

2.2 Propiedades termodinámicas

Entendemos por propiedades termodinámicas a todas aquellas variables propias de un fluido que caracterizan y describen el estado termodinámico en que se encuentra. Estas propiedades son: densidad, calor específico y módulo de elasticidad.

2.2.1 Densidad

La densidad ρ de un fluido es la cantidad de masa por unidad de volumen y es una propiedad que permite describir el volumen que ocupa una determinada masa de fluido. Es una propiedad que depende de la temperatura, T , y la presión del fluido, p , y dicha relación queda determinada a partir de la denominada *ecuación de estado*, que permite calcular $\rho(T, p)$.

Los líquidos son bastante incompresibles, es decir, no es fácil inducir en ellos cambios de volumen mediante variaciones de presión, de manera que cambios en su densidad dado cambios en la presión son despreciables respecto de los cambios en su densidad ante cambios en la temperatura. Para el caso del agua, por ejemplo, la ecuación de estado se ha determinado empíricamente. La curva $\rho(T)$ para agua destilada en condiciones de presión atmosférica se muestra en la **Figura 2.8**.

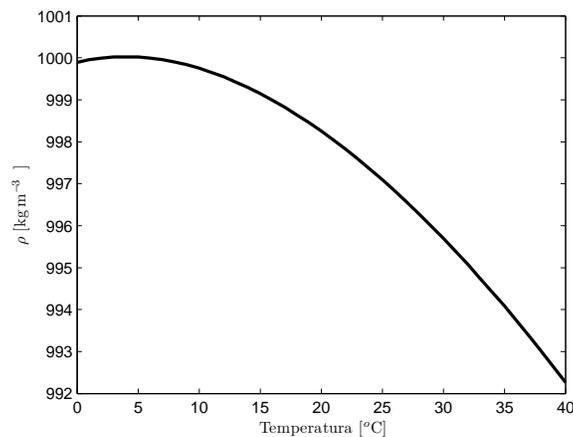


Figura 2.8: Densidad del agua en función de la temperatura para presión atmosférica.

Por otro lado, los líquidos pueden contener sustancias disueltas y su concentración también determina su densidad, de modo que es posible plantear una ecuación del tipo $\rho(T, C)$, donde C denota concentración de masa disuelta. Por ejemplo, el agua de mar

contiene del orden del 3.5 % de sal (Cloruro de Sodio, principalmente), lo cual produce un líquido con una densidad del orden del 2.5 % superior a la del agua dulce. En general, si bien el agua en los ríos y lagos, e incluso el agua potable, contiene algunas sales disueltas, su concentración es tan baja que para efectos prácticos la densidad de estas aguas puede asimilarse a la del agua destilada.

A diferencia de los líquidos, los gases son bastante compresibles, de manera que cambios en la densidad debido a cambios en la presión, son igualmente importantes que cambios en su densidad debido a cambios en la temperatura. La ecuación de estado de los gases se conoce mejor que la ecuación de estado de los líquidos. En particular, la ecuación de estado de los gases ideales (dentro de los cuales se cuenta el aire) es:

$$pV = nR_oT \quad (2.24)$$

donde V es el volumen de fluido, n el número de moles y R_o la constante universal de los gases. Si expresamos el número de moles n como la razón entre la masa del fluido M , y la masa molar m_o , se obtiene que:

$$p = \rho RT \quad (2.25)$$

donde, por definición, ρ es la razón entre la masa y el volumen de fluido, y $R = R_o/m_o$ es la constante específica del gas considerado, la que deja de ser universal y pasa a depender del fluido (ya que depende de su masa molar). Para el caso del aire, $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$.

Es importante notar que la ecuación de estado de los gases ideales es válida para condiciones de equilibrio termodinámico. Si bien en problemas de flujos de fluidos con cambios rápidos de algunas variables termodinámicas dicha condición de equilibrio no es necesariamente válida, supondremos en este curso que el error asociado a la aplicación de la ecuación de estado de los gases ideales a esos casos es poco importante.

Por último, una de las principales conclusiones que se obtiene de este análisis es que cualquier variable termodinámica (p , ρ , T) queda determinada si se conocen las otras dos. En este caso en particular nos centramos en conocer $\rho(p, T)$, pero es perfectamente posible, pero no necesariamente útil, conocer ρ a partir de, por ejemplo, la entropía y la energía. Este principio será utilizado en el siguiente punto, donde veremos que con la elección de una apropiada base de dos variables termodinámicas, se obtiene una ecuación para calcular cambios en la temperatura del fluido dado el intercambio de calor con el medio externo.

2.2.2 Calor específico

Se define como la cantidad de calor necesaria para aumentar la temperatura de una masa unitaria de fluido en una unidad de temperatura.

Es recomendable discutir, primero, cómo se aplican los conceptos termodinámicos a un fluido. Tal como se discutió acerca de la utilidad de expresar las fuerzas en términos

de esfuerzos (fuerzas por unidad de superficie), es igual de conveniente hacer la distinción entre variables *extensivas* (dependientes de la masa), y variables *intensivas* o específicas, que son independientes de la masa. Por convención denotaremos con letras mayúsculas aquellas variables extensivas y con letra minúscula las variables específicas, tal que la variable extensiva A se relaciona con su correspondiente variable intensiva a como:

$$a = \frac{A}{m} \quad (2.26)$$

donde m es la masa del sistema termodinámico.

Analicemos a continuación la energía de un sistema termodinámico, por ejemplo un volumen de control de fluido. En sistemas conservativos que experimentan un proceso físico, la energía inicial del sistema es igual a la energía final, donde la energía tiene al menos dos componentes, energía cinética y energía potencial. No obstante, en sistemas no conservativos la suma de energía cinética y energía potencial no es igual al inicio y al cabo del proceso, lo que se debe a la existencia de disipación de energía debido a efectos de fricción a nivel molecular, lo que en el caso de un fluido se relaciona con su viscosidad.

En sistemas no conservativos, el principio de conservación de la energía se expresa mediante la primera ley de la termodinámica que expresa que para un sistema termodinámico se cumple que:

$$\Delta E = \hat{Q} - W \quad (2.27)$$

Es decir, los cambios en la energía total del sistema termodinámico (ΔE) se deben a la cantidad de calor intercambiada con el medio externo (\hat{Q} , positivo si el medio entrega calor) y el trabajo mecánico intercambiado con el medio externo (W , positivo si el sistema termodinámico ejerce trabajo sobre el medio).

Consideremos ahora un proceso termodinámico en el que cambio de energía potencial y cinética es nulo (por ejemplo, fluido en reposo). En este caso el trabajo externo W en (2.27) solo se debe a expansiones o contracciones del volumen de control a favor o en contra de la presión, y por lo tanto (2.27) puede expresarse (en términos de variables intensivas) como:

$$\Delta e = \hat{q} - p dv \quad (2.28)$$

donde e es la energía interna específica, \hat{q} es el calor por unidad de masa, p denota presión y v es el volumen específico ($v = 1/\rho$). Consideremos ahora una transformación isovolumétrica (es decir, un proceso tal que volumen del fluido se mantenga constante), y por lo tanto $dv = 0$. Entonces:

$$\Delta e = \hat{q}, \quad (2.29)$$

que demuestra en este caso que los cambios en la energía del sistema se deben solo a intercambios de calor con el medio, siendo necesario considerar un tercer tipo de energía, denominada *energía interna*, U (o bien u : energía interna específica), que da cuenta de estos procesos. Esta energía interna adquiere un papel relevante en mecánica de fluidos ya

que, cuando consideramos que el fluido se encuentra en movimiento, cambios en la energía mecánica (energía cinética más energía potencial) se equilibran con el trabajo ejercido por los esfuerzos de corte viscosos o la presión; sin embargo, el problema no queda completamente cerrado, siendo necesario considerar cambios en la temperatura del fluido que se deben a que la energía por fricción viscosa se transforma en calor que incrementa la energía interna del fluido.

Algo de esta relación entre calor y energía mecánica se puede deducir al analizar la segunda ley de la termodinámica, que escribiremos como:

$$T\delta S \geq \hat{Q} \quad (2.30)$$

donde S es la entropía del sistema, que corresponde a la variable termodinámica que da cuenta de si es posible alcanzar un estado termodinámico mediante una transformación espontánea, sin la acción externa¹. A continuación analizaremos el caso particular de los denominados procesos reversibles, donde la dirección en la cual se realiza una transformación termodinámica no es relevante, de manera que es posible saltar de un estado termodinámico 1 a uno 2, y posteriormente volver al estado termodinámico 1 sin pérdidas en la energía mecánica. Como sabemos, este caso no es posible en la realidad, y tiene asociado un nivel constante de entropía, de manera que la segunda ley de la termodinámica queda reducida a ²:

$$T\delta S = \hat{Q} \quad (2.31)$$

Si nuevamente consideramos que el fluido se encuentra en reposo, lo que nos permite manipular algebraicamente (2.28) para obtener las siguientes relaciones:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s = -p, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v = T \quad (2.32)$$

donde los subíndices fuera de los paréntesis denotan que esa variable permanece constante. Al calcular las segundas derivadas se obtiene:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v = -\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s \quad (2.33)$$

que es una de las denominadas relaciones de Maxwell. Si bien existen otras tres relaciones de Maxwell, para obtenerlas es necesario definir otros conceptos termodinámicos que no son del todo relevantes para este curso introductorio, de manera que definiremos que una de esas relaciones de Maxwell es

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \quad (2.34)$$

¹Note que la energía es la cantidad termodinámica que da cuenta si un estado termodinámico puede ser alcanzado o no.

²Note que si bien sabemos que esta ecuación es además igual cero, momentáneamente no impondremos este resultado ya que impediría continuar con el análisis.

Por otro lado, al expresar s como función de T y p se obtiene que

$$T\delta s = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \delta T + T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \delta p \quad (2.35)$$

y dado (2.31), obtenemos finalmente:

$$\hat{q} = \Delta u + p dv = c_p \delta T - \beta v T \delta p \quad (2.36)$$

con

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_p \quad (2.37)$$

el calor específico a presión constante, y

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.38)$$

es el coeficiente de expansión térmica que indica cómo cambia el volumen debido a cambios en la temperatura. De esta forma, (2.36) nos muestra que parte del calor suministrado \hat{q} se traduce en un aumento en la temperatura (primer término del lado derecho), pero también en cambios en la presión debido a expansiones del volumen de control. Por otro lado, si reordenamos (2.36) considerando (2.28), es fácil de obtener:

$$\Delta u = c_p \delta T - \beta v T \delta p - p dv \quad (2.39)$$

que muestra que en reacciones reversibles de fluidos en reposo, cambios en la energía interna se explican, por una parte, por aumento de la temperatura, pero por otra por los cambios de presión y volumen, términos asociados a dv y δp , los que están asociados al trabajo mecánico.

Existe un segundo calor específico, c_v , definido como calor específico a volumen constante, el que para los gases ideales es fácil deducir que se relaciona con c_p como:

$$c_p = c_v + R, \quad (2.40)$$

aunque se cumple en general que $c_p = k c_v$, con $k = 1.4$ para gases diatómicos, y $k = 5/3 = 1.67$ para gases monoatómicos.

Por último, es fácil ver que para transformaciones isotérmicas en gases ideales (es decir, aquellas que mantienen la temperatura constante del fluido), se cumple que $pV = Cte$; mientras que para transformaciones adiabáticas (vale decir, aquellas en no existe intercambio de calor entre el fluido y el medio externo, $\hat{Q} = 0$), entonces $pV^k = Cte$, con $k = c_p/c_v$.

2.2.3 Módulo de compresibilidad

Es una propiedad del fluido que relaciona los cambios de presión a la que está sometido el fluido con los cambios de volumen asociados. En general, el cambio de volumen unitario es proporcional al cambio de presión tal que:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{K} \quad (2.41)$$

donde K denota el módulo de compresibilidad y el signo negativo indica que aumentos de presión tienen asociado una disminución del volumen de fluido. Esta expresión puede expresarse, también, en términos del cambio de densidad asociado al cambio de presión como:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{K}{\rho} \quad (2.42)$$

El módulo de compresibilidad también determina la velocidad con que se propagan las ondas de presión en el fluido, es decir la velocidad del sonido en el medio, a . En efecto, es posible definir:

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2 \quad (2.43)$$

o bien,

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2.44)$$

Para un gas ideal, el coeficiente de compresibilidad no es una constante, ya que la ecuación de estado define cómo varía la densidad o el volumen con la presión. Por ejemplo para un proceso isotérmico, tal que pV es constante, es fácil deducir que:

$$K = p \quad (2.45)$$

en tanto que para un proceso adiabático, tal que pV^k es constante, entonces se obtiene:

$$K = k p \quad (2.46)$$

2.3 Presión de vapor

La presión de vapor se define como la presión parcial que ejercen las moléculas de un líquido que están sobre la interfaz gas-líquido (interfaz también llamada superficie libre). Alternativamente, podemos entender la presión de vapor como la mínima presión que puede tener un

líquido para que éste cambie de fase de líquido a gas, dando una idea de qué tan volátil es el líquido. Es así que la presión de vapor impone un límite para la existencia de un líquido, ya que si la presión a la que se encuentra el líquido es inferior a la de vapor, éste cambia de fase, es decir se vaporiza. En general, la presión de vapor depende de la temperatura, por lo tanto, para conseguir el cambio de fase de líquido a gas (es decir, la ebullición del líquido), se puede cambiar la temperatura del líquido para que la presión de vapor se iguale a la presión ambiente, o bien se puede cambiar la presión ambiente para que ésta iguale la presión de vapor a temperatura ambiente.

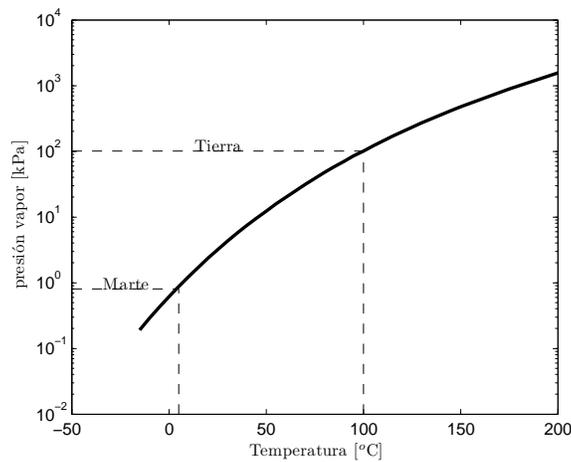


Figura 2.9: Curva presión de vapor en función de temperatura para agua.

Dado que la presión de vapor es una propiedad que depende de la temperatura (e.g., **Figura 2.9**), y el hecho que imponga un límite para la presión de los líquidos tiene importantes repercusiones en la ingeniería hidráulica. En particular, nos referiremos a la *cavitación*, que ocurre cuando por condiciones locales del flujo, la presión del fluido disminuye por debajo de la presión de vapor, resultando en la formación de burbujas como las que se forma tras la estela de un barco (**Figura 2.10**). El principal problema de la cavitación radica en la destrucción de los materiales dado que, si bien la formación de burbujas es paulatina, cuando la presión del fluido aumenta, posteriormente, por sobre la presión de vapor (por ejemplo cuando éstas son transportadas hacia zonas de mayor presión por el flujo), la burbujas colapsan, liberando localmente una gran cantidad de energía, lo que puede llevar a erosionar la superficie de las piezas mecánicas.



Figura 2.10: Formación de estela de gases atrás de una hélice.

2.4 Tensión superficial

La última de las propiedades que discutiremos en este capítulo se conoce como *tensión superficial* y se aplica a líquidos. Esta propiedad se debe a que las fuerzas de cohesión entre moléculas de un líquido producen que la superficie libre de éste (i.e., la interfaz entre el líquido y un gas) se comporte como una membrana tensa, al estar las moléculas de la superficie sujetas a distintas fuerzas de cohesión por el lado del gas y del líquido. Es así que si aislamos un elemento 2D en la superficie libre de un líquido aparecen fuerzas de tensión, uniformemente distribuidas a lo largo de los lados del elemento de superficie y tangenciales a éste, que dan lugar al concepto de tensión superficial. La tensión superficial, por lo tanto, es una fuerza por unidad de longitud que denotaremos σ y cuyas dimensiones son: $[F][L]^{-1} = [M][T]^{-2}$.

A pesar que la tensión superficial es una propiedad de los líquidos, ella presenta un comportamiento interesante cuando el líquido está en contacto con un sólido, y el modo en que la interacción entre el líquido y el sólido se da, depende tanto de las propiedades del líquido como del tipo de superficie del sólido con el que esté en contacto. En particular, cuando la superficie de un líquido se encuentra en contacto con una superficie sólida, es posible que ésta se curve como se muestra en la **Figura 2.11A**, caso que ocurre, por ejemplo, para agua en contacto con el vidrio, o bien en el sentido inverso, como se muestra en la **Figura 2.11B**, caso que se da, por ejemplo, para mercurio en contacto con el vidrio.

El ángulo de contacto θ , definido como menor de 90° para el caso (A) de la **Figura 2.11**, corresponde a una situación en la que se dice que el líquido *moja* la superficie, en tanto que cuando θ es mayor que 90° , caso (B) de la **Figura 2.11**, entonces se dice que el líquido *no*

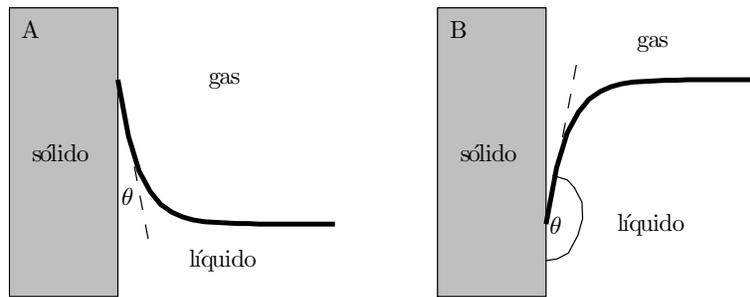


Figura 2.11: Tipo de interacción entre superficie libre y superficie sólida. (A) agua en contacto con vidrio, (B) mercurio en contacto con vidrio.

moja la superficie. El valor del ángulo de contacto depende tanto del fluido como de las características de la superficie sólida. Por ejemplo, el agua sobre una superficie lisa *moja*, sin embargo si la misma superficie se encera, entonces el ángulo de contacto se hace negativo y el agua en ese caso *no moja*. Por otro lado el mercurio tampoco moja la superficie lisa, aunque ésta no esté encerada.

Teniendo en cuenta esta descripción de la tensión superficial podemos analizar el denominado ascenso o descenso capilar, para lo cual consideremos un tubo cilíndrico de diámetro d que se sumerge en el agua. Si el ángulo $\theta < 90^\circ$ (caso de **Figura 2.11A**), vemos la formación de un menisco con forma como la que se muestra en la **Figura 2.12** y que la superficie libre del fluido dentro del tubo se encuentra a una altura Δh mayor que la del fluido fuera del cilindro. Por un lado, podemos ver que la fuerza neta, F_n , hacia arriba debido a la tensión superficial es igual a:

$$F_n = \pi d \sigma \cos \theta \quad (2.47)$$

y por otro, el peso de la columna de agua de altura dentro del tubo, W , es igual a:

$$W = \frac{\pi d^2}{4} g \rho \Delta h \quad (2.48)$$

el que debe ser igual a F_n para lograr el equilibrio estático, y por lo tanto:

$$\Delta h = 4 \frac{\sigma \cos \theta}{g d \rho} \quad (2.49)$$

Un segundo ejemplo que podemos analizar es la formación de gotas y burbujas, para lo cual consideremos un elemento de superficie libre de un líquido, con radios de curvatura R_1 y R_2 , como se muestra en la **Figura 2.13**. El elemento tiene aristas de dimensiones dl_1 y dl_2 , definiendo los ángulos elementales $d\phi_1$ y $d\phi_2$, respectivamente. La tensión superficial del líquido, σ , es capaz de equilibrar la diferencia entre las presiones interna, p_{int} , y externa,

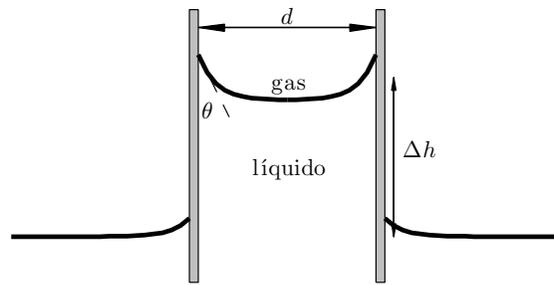


Figura 2.12: Esquema para análisis del ascenso capilar. Note por simplificación de la figura graficamos un corte diametral, y no el tubo cilíndrico de diámetro d .

p_{ext} , con respecto a la superficie. Dadas las curvaturas definidas en la **Figura 2.13**, es obvio que la presión interna es mayor que la presión externa.

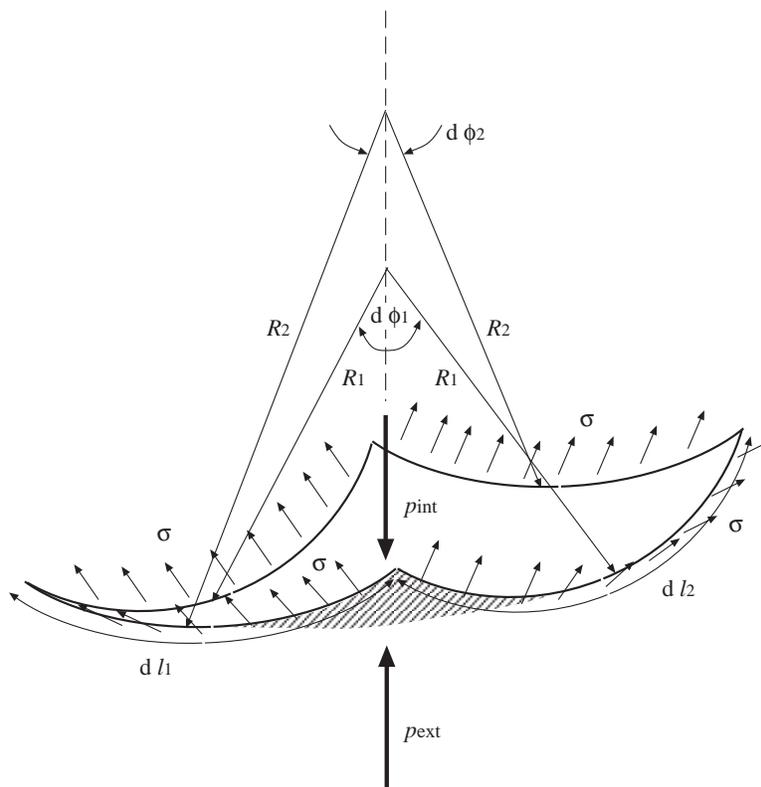


Figura 2.13: Superficie libre curva sometida a tensión superficial.

Considerando que el elemento de superficie está orientado de modo que su normal apunta

verticalmente, es posible suponer que ambas presiones, p_{int} y p_{ext} , se alinean también verticalmente. Planteando la condición de equilibrio de fuerzas en esta dirección se tiene:

$$Fp_{int} - Fp_{ext} - F_{\sigma} = 0 \quad (2.50)$$

donde Fp_{int} y Fp_{ext} son las fuerzas de presión interna y externa, respectivamente, y F_{σ} es la fuerza de tensión superficial, actuando en las aristas del elemento de volumen.

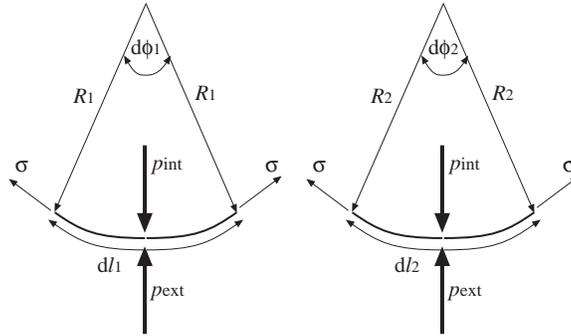


Figura 2.14: Vistas de perfil de la **Figura 2.13**.

Considerando que el área del elemento de volumen es $dA = dl_1 dl_2$, entonces las fuerzas de presión están dadas por:

$$Fp_{int} = p_{int} dl_1 dl_2 \quad ; \quad Fp_{ext} = p_{ext} dl_1 dl_2 \quad (2.51)$$

Considerando ahora los diagramas de la **Figura 2.14**, la fuerza de tensión superficial se calcula como:

$$F_{\sigma} = 2 \sigma dl_1 \sin\left(\frac{d\phi_2}{2}\right) + 2 \sigma dl_2 \sin\left(\frac{d\phi_1}{2}\right) \quad (2.52)$$

Dado que los ángulos $d\phi_1$ y $d\phi_2$ son pequeños, entonces se tiene:

$$\sin\left(\frac{d\phi_1}{2}\right) \approx \frac{d\phi_1}{2} \quad ; \quad \sin\left(\frac{d\phi_2}{2}\right) \approx \frac{d\phi_2}{2} \quad (2.53)$$

y adicionalmente se cumple:

$$dl_1 = R_1 d\phi_1 \quad ; \quad dl_2 = R_2 d\phi_2 \quad (2.54)$$

Finalmente, reemplazando estas relaciones en la ecuación de equilibrio de fuerzas, se obtiene:

$$p_{int} - p_{ext} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.55)$$

ecuación que es conocida como *fórmula de Laplace* para la tensión superficial.

Para el caso de una superficie esférica, en que: $R_1 = R_2 = R$, se cumple:

$$p_{int} - p_{ext} = \frac{2 \sigma}{R} \quad (2.56)$$

Capítulo 3

Estática de fluidos

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de un fluido que se encuentra en un estado estático, para lo cual analizaremos primero el concepto de presión y los balances de fuerzas que explican esta situación estática, y posteriormente analizaremos y calcularemos las fuerzas asociadas a la presión del fluido que actúan sobre una superficie sólida.

3.1 La presión estática

Como primera medida es necesario definir cuándo consideramos que un volumen de fluido se encuentra en un estado estático. Más allá de la definición literal en la que el fluido no está en movimiento, los resultados que discutiremos en este capítulo son válidos también para el caso en que el fluido no experimenta deformación angular ($\dot{\gamma} = 0$), permitiéndose que éste se encuentre en movimiento, pero sin que exista movimiento relativo entre porciones distintas de él. Es decir, se tendrá equilibrio estático cuando el fluido está en reposo, o bien cuando todo el volumen de fluido se desplaza como un cuerpo sólido, sin deformación angular. Considerando la reología o ley constitutiva de los fluidos, el que no exista deformación angular en el fluido es equivalente a que no existan esfuerzos de corte actuando sobre él.

De acuerdo con esta definición y la descomposición entre esfuerzos de corte y esfuerzos normales que realizamos en el Capítulo 1, es fácil ver que los esfuerzos existentes en un fluido en equilibrio estático son sólo esfuerzos normales de presión, la que se define como la fuerza de compresión por unidad de área actuando sobre la superficie de un volumen de fluido. Como la presión corresponde a una fuerza de compresión, entonces se entiende que ella actúa localmente en la dirección opuesta a la de la normal a la superficie. A pesar de esta definición, se puede afirmar que la presión en un punto de un fluido es un escalar, y por tanto tiene una magnitud que es independiente de la dirección en que ella actúa. De hecho, dicha dirección queda definida por la normal a la superficie considerada en el punto

del fluido, la cual, en principio, puede ser seleccionada externamente para efectos del análisis, variando la orientación de la superficie.

Demostremos esta propiedad, considerando un volumen de fluido elemental, correspondiente a una pirámide infinitesimal construida en torno a un punto P del espacio fluido (**Figura 3.1**). Los vértices de la pirámide se denotan A , B y C . Existen por tanto 4 superficies donde actúan las fuerzas de presión. Estas se denotan como las caras ABC , APB , APC y BPC , respectivamente.

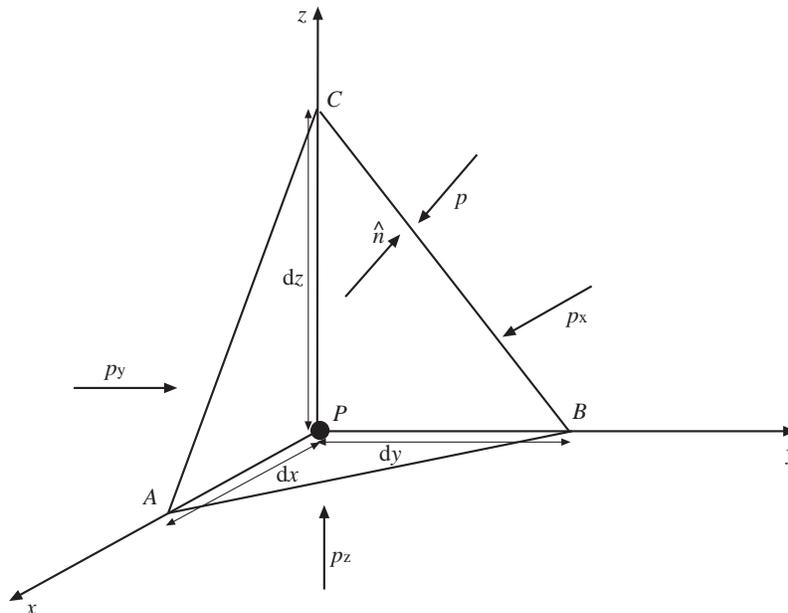


Figura 3.1: Pirámide elemental de fluido.

Sean l , m y n los cosenos directores de la normal \hat{n} de la cara ABC con respecto a los ejes coordenados x , y , z , respectivamente. Si α , β y χ , son los ángulos entre la normal y los ejes x , y , z , respectivamente, entonces:

$$\hat{n} \cdot \hat{i} = \cos \alpha = l \quad ; \quad \hat{n} \cdot \hat{j} = \cos \beta = m \quad ; \quad \hat{n} \cdot \hat{k} = \cos \chi = n \quad (3.1)$$

Sea S el área de la cara ABC . El área de las otras caras es, por lo tanto:

$$S_{BPC} = l S \quad ; \quad S_{APC} = m S \quad ; \quad S_{APB} = n S \quad (3.2)$$

Denominemos p a la presión actuando en la cara ABC y p_x , p_y y p_z a las presiones actuando en las caras BPC , APC y APB , respectivamente.

El volumen piramidal está en equilibrio estático si la resultante de las fuerzas externas que actúa sobre ella es nula.

Sin considerar el del volumen de control, entonces se tiene (ver **Figura 3.2**):

- Dirección x :

$$-p S \cos \alpha + p_x S_{BPC} = 0 \quad (3.3)$$

y dado que $l = \cos \alpha$ y $S_{BPC} = l S$, entonces:

$$-p S l + p_x l S = 0 \quad (3.4)$$

y por lo tanto:

$$p_x = p \quad (3.5)$$

- Dirección y :

$$-p S \cos \beta + p_y S_{APC} = 0 \quad (3.6)$$

y dado que $m = \cos \beta$ y $S_{APC} = m S$, entonces:

$$-p S m + p_y m S = 0 \quad (3.7)$$

y por lo tanto:

$$p_y = p \quad (3.8)$$

- Dirección z :

$$-p S \cos \chi + p_z S_{APB} = 0 \quad (3.9)$$

y dado que $n = \cos \alpha$ y $S_{APB} = n S$, entonces:

$$-p S n + p_z n S = 0 \quad (3.10)$$

y por lo tanto:

$$p_z = p \quad (3.11)$$

Se concluye entonces que: $p_x = p_y = p_z = p$, y como al tomar el límite cuando dx , dy y dz tienden a cero, el volumen infinitesimal se reduce al punto P, entonces se concluye que la presión actuando en este punto es de magnitud constante, p , independiente de la dirección, es decir, que la presión es un escalar.

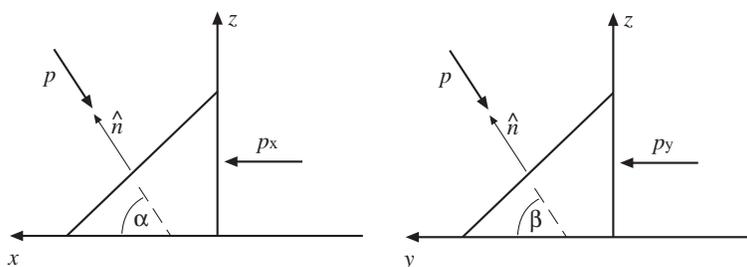


Figura 3.2: Diagrama de presiones actuando sobre las caras del volumen piramidal de fluido.

3.2 Condición para el equilibrio estático

Una vez deducido que la presión es un escalar, el que adquiere la característica vectorial de una fuerza cuando se considera la superficie sobre la cual está actuando, podemos comenzar el análisis de cuáles son las fuerzas que permiten el equilibrio estático caracterizado, según la Segunda Ley de Newton, por:

$$\sum \vec{F} = 0, \quad (3.12)$$

donde \vec{F} denota las fuerzas actuando en el volumen de control, dentro de las cuales está la fuerza de presión. En términos genéricos descompondremos \vec{F} entre fuerzas superficiales (\vec{F}_s) y fuerzas másicas (\vec{F}_m), donde las primeras actúan sobre las superficies del volumen de control (que representamos en términos de esfuerzos normales y tangenciales como vimos en el Capítulo 1), mientras que las fuerzas másicas son aquellas que actúan sobre todo el volumen de control (en su centro de masa) y son proporcionales a la masa del fluido, por ejemplo el peso o la fuerza centrífuga.

Dado que estamos analizando el caso en que el fluido no está afecto a esfuerzos de corte, son las fuerzas de presión las encargadas de equilibrar las fuerzas másicas de manera tal de producir el equilibrio estático. A partir de esto podemos analizar en detalle el balance de fuerzas de un volumen de control infinitesimal de fluido, de dimensiones dx , dy y dz . Dado que la presión es una función escalar, que además supondremos que cumple con las condiciones matemáticas razonables de continuidad de la función y su primera derivada, podemos expresar la presión en cada una de las 6 caras del volumen de fluido (p_e , p_n , p_w , p_s , p_t y p_b) en términos de la presión p en el centro del mismo, utilizando una expansión en serie de Taylor hasta los términos de primer orden, como por ejemplo para las caras e y b (ver **Figura 3.3**):

$$p_e = p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}, \quad p_b = p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \quad (3.13)$$

Por lo tanto, dado que las fuerzas asociadas a las presiones p_e y p_w actúan comprimiendo

el volumen de control tal y como se muestra en **Figura 3.3**, la acción neta resultante en la dirección x , dF_{sx} , es igual a

$$dF_{sx} = p_w dy dz - p_e dy dz = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} - p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (3.14)$$

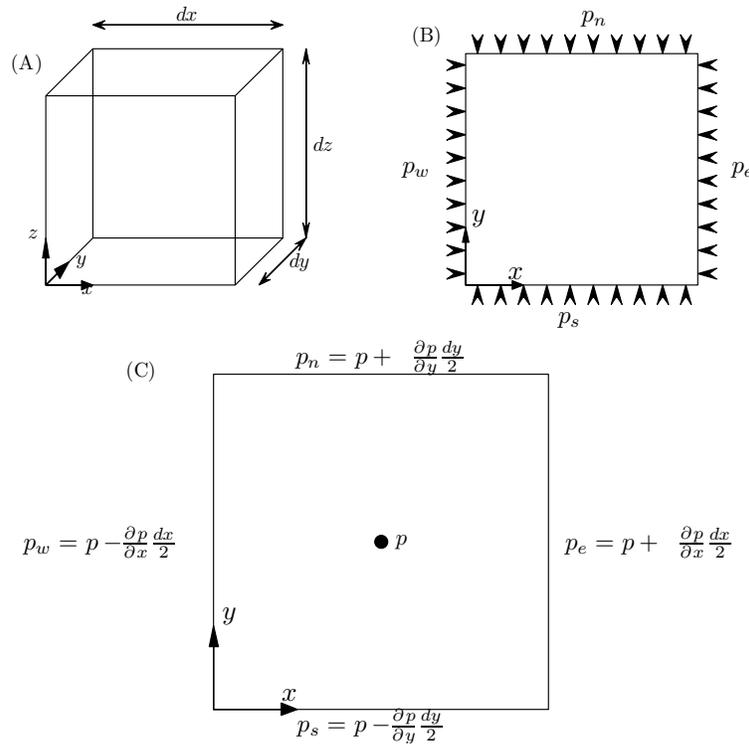


Figura 3.3: Esquema para cálculo de fuerzas superficiales actuando sobre volumen de control.

Análogamente, si llamamos dF_{sy} y dF_{sz} a las fuerzas superficiales neta que actúan en las direcciones y y z , respectivamente, es fácil demostrar que éstas son iguales a:

$$dF_{sy} = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \quad (3.15)$$

y

$$dF_{sz} = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \quad (3.16)$$

Es así que en notación vectorial podemos decir que:

$$d\vec{F}_s + d\vec{F}_m = 0 \Rightarrow d\vec{F}_m - \nabla p dV = 0 \quad (3.17)$$

donde $d\vec{F}_s = dF_{sx}\hat{i} + dF_{sy}\hat{j} + dF_{sz}\hat{k}$ denota al vector de fuerzas superficiales netas, $dV = dx dy dz$ es el volumen de control, y $d\vec{F}_m = dF_{mx}\hat{i} + dF_{my}\hat{j} + dF_{mz}\hat{k}$ denota al vector de fuerzas másicas netas actuando sobre el volumen de control.

A continuación podemos introducir el concepto de fuerza másica por unidad de masa \vec{f} (o aceleración del campo de fuerzas másicas actuando sobre el fluido), tal que:

$$d\vec{F}_m = \vec{f} dm = \vec{f} \rho dV \quad (3.18)$$

donde dm denota la masa del volumen de control que expresamos en términos de la densidad del fluido, ρ . El término \vec{f} tiene obviamente dimensiones de aceleración $[L][T]^{-2}$. De esta forma, el balance de fuerzas de (3.17) queda finalmente escrito en notación vectorial como:

$$\nabla p = \rho \vec{f} \quad (3.19)$$

Al expandir (3.19) obtenemos que en las direcciones x , y y z , el equilibrio estático está descrito por:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \quad (3.22)$$

respectivamente, donde f_x , f_y y f_z son las componentes del vector aceleración del campo de fuerzas másicas en las direcciones respectivas.

3.2.1 Ejemplo, aplicación al campo gravitatorio terrestre

Como sabemos, cualquier masa sobre la superficie de la Tierra se encuentra sujeta a la acción del campo gravitatorio conjunto de todos los cuerpos del espacio, pero sin lugar a dudas, el campo gravitatorio terrestre es el que adquiere mayor relevancia al analizar los balances de fuerzas sobre esa masa. Consideraremos un volumen de control de fluido, V , en equilibrio estático, en un sistema de coordenadas cartesianas tal que el eje z es vertical hacia arriba, contrario al vector de aceleración de gravedad terrestre. Suponiendo despreciables los efectos gravitacionales distintos al terrestre, se tiene que la fuerza másica específica (i.e., la aceleración asociada al campo de fuerza másica) actuando sobre el fluido es:

$$\vec{f} = -g \hat{k} \quad (3.23)$$

y, por lo tanto, la condición de equilibrio estático para el volumen de fluido está dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.24)$$

Al integrar entre dos elevaciones, z_0 y z , se obtiene:

$$\int_{p_0}^{p(z)} dp = p(z) - p_0 = -g \int_{z_0}^z \rho dz \quad (3.25)$$

que demuestra que en la situación estática se cumple que:

- la presión aumenta con la profundidad de manera de equilibrar el peso por unidad de superficie de la columna de fluido.
- la presión no varía en planos horizontales, resultando que dos puntos situados en una misma elevación z_0 , tienen la misma presión. Este hecho se cumple solo en caso que se pueda definir una línea continua de fluido que una ambos puntos. Por ejemplo, si consideramos la manguera de la **Figura 3.4**, en caso que exista conexión en el fluido entre los puntos A y B podemos decir que $p_A = p_B$, sin embargo, si manguera está obstruida entre A y B, entonces p_A no es necesariamente igual a p_B .

Las superficies de igual presión al interior de un fluido se denominan *isóbaras*. En particular, la superficie libre de un líquido, que se encuentra a presión atmosférica, corresponde a la isóbara de presión atmosférica. Por lo tanto, para un fluido en reposo en el campo gravitacional terrestre las isóbaras son horizontales y en el caso de líquidos en ese mismo estado, la superficie libre (o isóbara de presión atmosférica) es también horizontal.

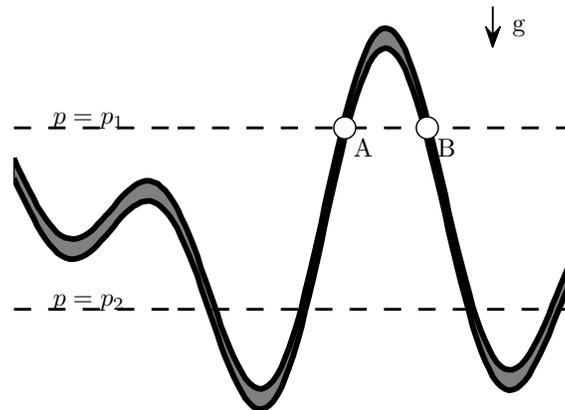


Figura 3.4: Variación horizontal de presión hidrostática.

Consideremos el caso de un fluido de densidad homogénea, ρ , por ejemplo un líquido en condiciones normales de presión y a temperatura constante. Si sabemos que en $z = z_0$, $p = p_0$, entonces obtenemos la denominada *ley hidrostática* de presiones escrita como:

$$p(z) = p_0 - \rho g (z - z_0), \quad (3.26)$$

Esta ley indica que la presión del fluido aumenta linealmente en profundidad para equilibrar el peso de la columna de fluido.

Dado que el aumento de presión depende del valor de la densidad, es usual considerar este efecto despreciable en el caso de los gases, a diferencia de los líquidos, dado el valor prácticamente despreciable de la densidad de los gases con respecto a la de los líquidos. Por ejemplo, el aire en la atmósfera sobre la superficie terrestre tiene una densidad típica del orden de 1.2 kg m^{-3} , mientras que la densidad del agua es del orden de 1000 kg m^{-3} , esto indica que para obtener el mismo cambio de presiones en la atmósfera que se tiene entre la superficie y fondo de un estanque de agua de 1 m de profundidad se necesita una altura del orden de 833 m de columna de aire.

Si definimos el peso específico $\gamma = \rho g$ ¹ y reorganizamos (3.26), obtenemos:

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_0}{\gamma} + z_0 \quad (3.27)$$

donde p/γ se denomina *altura de presión* y corresponde a la altura que tendría una columna de fluido de peso específico γ tal que el peso por unidad de superficie sea igual a la presión p en la base de la columna. La suma $p/\gamma + z$ se denomina *cota piezométrica* y representa la cota o nivel que alcanza la superficie libre de un líquido al interior de un tubo (o piezómetro) conectado a un volumen mayor de líquido en un punto de elevación z donde la presión es p . Como se deduce de la ecuación anterior, para un líquido que cumple con la ley hidrostática, la cota piezométrica se mantiene constante, independiente del punto de conexión del piezómetro o de su geometría. En particular si z_0 es un punto en la superficie libre a presión atmosférica p_0 , entonces la cota piezométrica será igual al nivel o cota de dicha superficie, independientemente del punto de conexión del piezómetro o su geometría.

Por último, si definimos la elevación de referencia z_0 en la superficie libre de un líquido donde la presión es la atmosférica, p_{atm} , y definimos la presión relativa $p' = p - p_{atm}$ de manera que:

$$p' = -\gamma(z - z_0) \quad (3.28)$$

entonces vemos que la presión relativa aumenta linealmente en profundidad partiendo del valor nulo en la superficie libre. En un gráfico de la presión versus la elevación, la ley hidrostática se ve reflejada en líneas rectas de pendiente igual a γ (ver **Figura 3.5**), tal que a mayor peso específico del líquido, mayor es el incremento de presión en profundidad.

Es usual en la práctica trabajar con presiones relativas y en ese caso se suele denotarlas simplemente como p , sin hacer diferencia explícita con respecto a las presiones absolutas. Se debe tener claro que la presión absoluta es siempre positiva, mientras que la presión relativa puede ser perfectamente negativa (por ejemplo, el agua puede soportar presiones bastante inferiores a la atmosférica, i.e., 1 atm, sin cambiar de fase), aunque los valores negativos

¹note que γ fue usado para la deformación angular en los capítulos anteriores, pero de ahora en adelante lo re-definiremos como el peso específico o peso por unidad de volumen

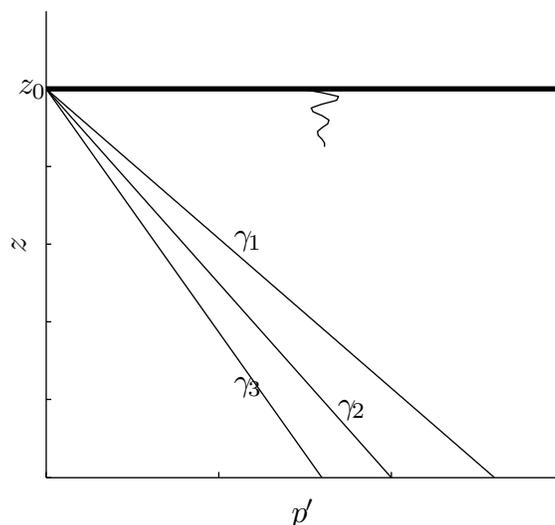


Figura 3.5: Esquema de variación vertical de presión hidrostática. $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$

quedan limitados por el valor de la presión de vapor. Por otro lado, al trabajar con la ecuación de estado de gases ideales debe recordarse que la presión en ese caso corresponde a la presión absoluta.

3.2.2 Equilibrio estático de presiones en sistemas no inerciales

Al analizar el balance estático de fuerzas cuando el sistema de referencia es no inercial, o sea cuando el sistema de coordenadas se encuentra acelerado con una aceleración $\vec{a}_S = a_{Sx}\hat{i} + a_{Sy}\hat{j} + a_{Sz}\hat{k}$, el fluido percibe la aceleración del sistema de coordenadas como una denominada *fuerza aparente* que actúa en sentido contrario a la aceleración del sistema de referencias. Ejemplos de esto son la aceleración *hacia adelante* que percibimos cuando el metro se desacelera o la denominada fuerza centrífuga en un sistema rotando que resulta de la aceleración centrípeta asociada a la rotación. En estos casos no-inerciales, las fuerzas aparentes se perciben en el fluido como campos de fuerzas externas, que afectan el balance de fuerzas del equilibrio estático. Considerando que el sistema de coordenadas se mueve con una aceleración \vec{a}_S , se cumple que:

$$\vec{f}_m = -\vec{a}_S \quad (3.29)$$

y por lo tanto, las ecuaciones que describen el balance de fuerzas cuando el fluido se encuentra en equilibrio estático en el campo gravitatorio terrestre, con un sistema de coordenadas orientado con el eje z verticalmente hacia arriba, son:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_{Sx} ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_{Sy} \quad (3.30)$$

para las direcciones x e y , respectivamente, y

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(a_{sz} + g) \quad (3.31)$$

para la dirección z .

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que si la aceleración del sistema de referencia es constante, las superficies isobáricas son planos no necesariamente horizontales.
2. Demuestre que las superficies isobáricas de un líquido en un estanque cilíndrico rotando según \hat{k} a una velocidad angular constante ω_0 (ver **Figura 3.6**), son paraboloides de revolución. Notar que el líquido alcanza una altura H sobre la base del estanque cuando el sistema no está rotando.

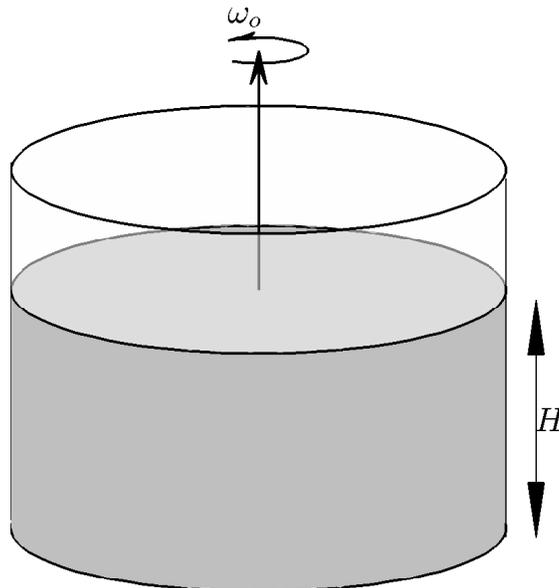


Figura 3.6: Rotación sólida en un cilindro.

3.2.3 Aerostática

Consideremos ahora a la atmósfera como medio fluido. En este caso, la densidad no puede considerarse constante, siendo necesario incorporar la dependencia entre p y ρ .

Supongamos que el aire se comporta como gas ideal:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (3.32)$$

donde la temperatura es función de la altura z . Por otro lado, en el campo gravitatorio terrestre vimos que

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.33)$$

entonces, de (3.32) y (3.33) obtenemos

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT} \quad (3.34)$$

Halley² consideró que la temperatura era contante, e igual a T_0 , lo que permite obtener

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_0} dz. \quad (3.35)$$

integrando se obtiene

$$\ln p = -\frac{g}{RT_0} z + Cte \quad (3.36)$$

Si para $z = 0$, $p = p_0$, obtenemos que la presión del aire varía con la altura de acuerdo con

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{RT_0} z} \quad (3.37)$$

La ecuación (3.37) se conoce como *ley de Halley*. Notar que como existe un proceso termodinámico asociado (isotérmico), las presiones y temperaturas deben ser absolutas.

Una mejor aproximación que la que hizo Halley es considerar una disminución lineal de la temperatura con la distancia:

$$T = T_0 - \alpha z \quad (3.38)$$

La (3.38) es válida hasta aproximadamente unos 15km sobre el nivel del mar. El coeficiente α toma el valor de $\alpha = 6.5^\circ\text{K km}^{-1}$. Reemplazando (3.38) en (3.34):

$$\frac{dp}{p} = \frac{pg}{R(T_0 - \alpha z)} dz \quad (3.39)$$

Integrando y considerando que en $z = 0$, $p = p_0$ y $T = T_0$ se tiene

$$p = p_0 \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\frac{g}{\alpha R}} \quad (3.40)$$

²astrónomo coetáneo a Newton que como verán hizo más que darle nombre a un cometa famoso

Otra relación puede encontrarse al suponer que la atmósfera se comporta adiabáticamente y considerando la variación de la aceleración de gravedad con la altura. Estas consideraciones se traducen en las siguientes relaciones:

$$\frac{p}{\rho^k} = Cte \quad (3.41)$$

y

$$g = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)} \quad (3.42)$$

donde R_T es el radio de la tierra y g_0 es la aceleración de gravedad en el nivel medio del mar (donde se toma el origen de coordenadas $z = 0$). De esta forma

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p^{1/k}}{p_0} \quad (3.43)$$

Reemplazando (3.42) y (3.43) en (3.33):

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g_0 \rho_0 p^{1/k}}{p_0^{1/k} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} \quad (3.44)$$

Finalmente, integrando (3.44) y usando la condición de borde de $p = p_0$ en $z = 0$, se obtiene:

$$p = \left(p_0^{k/k-1} - \frac{g_0 (k-1)}{k} \frac{\rho_0 z}{p_0^{1/k} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)} \right)^{k/k-1} \quad (3.45)$$