

4.3 Teorema del transporte de Reynolds. Enfoque diferencial

Aplicamos el teorema del transporte de Reynolds para estudiar la variación de la densidad ρ en un volumen de control infinitesimal, $dV = dx dy dz$; es decir, consideremos $\eta = 1$ y $R = 0$. Utilizando la notación definida en el Capítulo 1, denotamos con e y w las caras cuyo vector normal es $\hat{n}_{e/w} = \pm \hat{i}$, respectivamente, con n y s las caras cuya normal es $\hat{n}_{n/s} = \pm \hat{j}$, y t , b las caras con normal $\hat{n}_{t/b} = \pm \hat{k}$ (ver **Figura 4.9**).

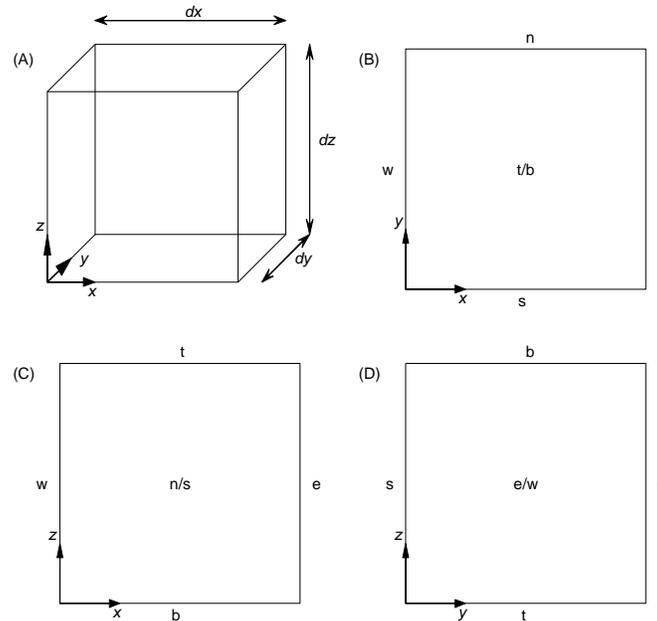


Figura 4.9: Definición de volumen de control dV y notación utilizada.

En este caso el teorema del transporte de Reynolds se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dx dy dz + \int_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (4.14)$$

sin embargo, dado que el volumen de control considerado es infinitesimal, el lado izquierdo de (4.14) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dx dy dz = dx dy dz \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.15)$$

Por otro lado, el segundo término de (4.14) se puede descomponer en 6 integrales que dan cuenta del flujo másico a través de cada una de las caras del volumen de control, de manera

que:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_e} \rho_e \vec{v}_e \cdot \hat{n}_e dS_x + \int_{S_w} \rho_w \vec{v}_w \cdot \hat{n}_w dS_x + \text{integrales en caras n, s, t y b} \quad (4.16)$$

Es fácil ver que:

$$\vec{v}_e \cdot \hat{n}_e = u_e \quad (4.17)$$

y

$$\vec{v}_w \cdot \hat{n}_w = -u_w \quad (4.18)$$

donde u_e y u_w son las componentes según x de la velocidad, evaluadas en las caras e y w , respectivamente. El signo negativo en u_w viene dado por el signo de $\hat{n}_w = -\hat{i}$. Por otro lado, si repetimos el mismo análisis para las otras 4 caras de dV , sabiendo que los elementos $dS_x = dy dz$, $dS_y = dx dz$, y $dS_z = dx dy$, y considerando que \vec{v} y ρ son uniformes en las respectivas caras, dadas sus dimensiones infinitesimales, obtenemos que la integral del lado derecho de (4.16) es:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot dS = (\rho_e u_e - \rho_w u_w) dy dz + (\rho_n v_n - \rho_s v_s) dx dz + (\rho_t w_t - \rho_b w_b) dx dy \quad (4.19)$$

Si ahora llamamos $u_w = u$, $\rho_w = \rho$, y hacemos una expansión en serie de Taylor en torno a w , truncando al primer orden, se tiene:

$$\rho_e u_e = \rho_w u_w + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}|_w dx + \dots = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx + \dots \quad (4.20)$$

y, si repetimos este procedimiento en las otras dos direcciones y reemplazamos en (4.14), entonces obtenemos la ecuación de conservación de la masa según el enfoque diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.21)$$

o bien:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (4.22)$$

considerando la definición de derivada material dada anteriormente. La ecuación (4.21) es conocida también como la ecuación de continuidad de masa.

Una manera alternativa de obtener esta ecuación es aplicando el teorema de la divergencia, el que expresa que:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad (4.23)$$

y como V no depende del tiempo, la derivada temporal de la integral sobre V en (4.14), la podemos expresar, aplicando la integración de Leibnitz, como la integral de la derivada temporal, tal que (4.14) queda:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0 \quad (4.24)$$

que indica que el término dentro de la integral es una constante, la que no puede ser otra que igual a 0.

Consideremos el caso particular de un fluido incompresible, el que hemos visto que se caracteriza por que su densidad es constante, de manera que la ecuación de continuidad de masa (4.21) se reduce a la ecuación de continuidad o conservación de volumen:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.25)$$

Cuando el vector velocidad cumple con esta propiedad se dice que es *solenoidal*. Finalmente, si realizamos el mismo análisis para una propiedad genérica, N , tal que:

$$N = \int_V \rho \eta dV \quad (4.26)$$

se obtiene que:

$$\frac{\partial(\rho \eta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \eta \vec{v}) = R_v \quad (4.27)$$

donde R_v es una tasa de reacción que expresa la variación de la propiedad N por unidad de volumen y de tiempo, en el caso que esta propiedad no se conserve (tales propiedades se denominan, usualmente, "no conservativas").

Es fácil ver que el lado izquierdo de la ecuación anterior cumple con:

$$\frac{\partial(\rho \eta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \eta \vec{v}) = \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \eta \right) + \eta \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) \quad (4.28)$$

y dado que en virtud de (4.21) el segundo término del lado derecho es cero, entonces la ecuación de conservación de N se reduce a:

$$\rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \eta \right) = \rho \frac{D\eta}{Dt} = R_v \quad (4.29)$$

4.4 Deformación de un elemento de fluido en movimiento

Consideremos un campo permanente de velocidades del flujo, \vec{v} . Fijemos un punto P en el espacio, en donde sabemos que la velocidad es $\vec{v} = (u, v, w)$. Por otro lado, tomemos un segundo punto P' , ubicado en la cercanía de P tal que podemos decir que la velocidad en P' es $\vec{v} + d\vec{v}$, con $d\vec{v} = (du, dv, dw)$. Luego,

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (4.30)$$

o bien,

$$d\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Es decir, la diferencia de velocidad entre P y P' queda caracterizada por 9 derivadas parciales, las que en conjunto determinan la deformación del fluido en movimiento. Es posible identificar 4 componentes básicos en el movimiento y deformación de un volumen de control infinitesimal: traslación pura, rotación pura, dilatación/contracción, y deformación angular, tal como se esquematiza en la **Figura 4.10**.

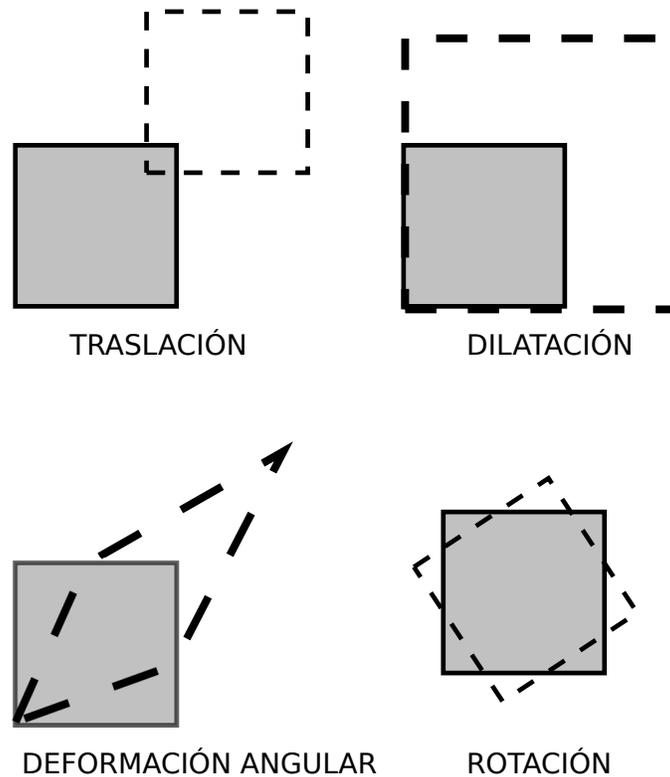


Figura 4.10: Tipos de deformación de un elemento fluido.

Estos componentes quedan determinados por las derivadas parciales que definen $d\vec{v}$. Para estudiarlos consideremos un volumen de control de dimensiones dx , dy y dz , cuyos vértices los denotamos como A , B , C , D , E , F , como se muestra en la **Figura 4.11**, en donde el vértice P se encuentra en el origen.

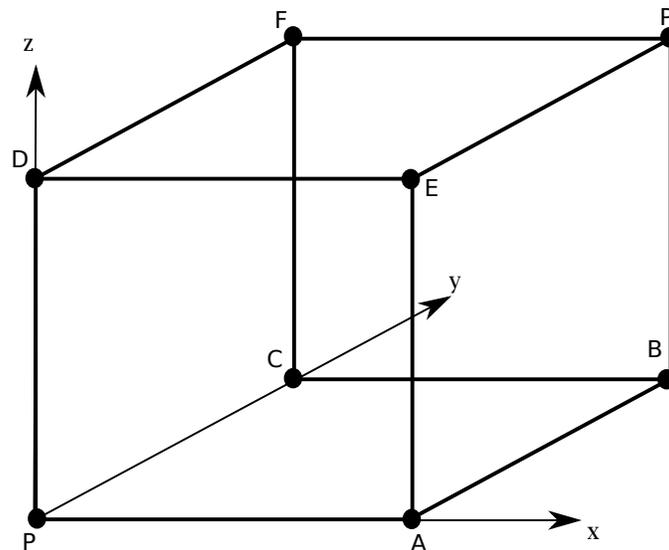


Figura 4.11: Definición de volumen de control para el análisis del movimiento y deformación del elemento fluido.

4.4.1 Traslación pura

Consideremos el caso simple de $d\vec{v} = 0$. En este caso todas las derivadas parciales son nulas y el volumen de control no experimenta ninguna deformación, por lo que está sometido a una *traslación pura*; es decir, cada vértice del volumen de control se desplaza con la velocidad \vec{v} , la que representa la tasa de traslación del elemento fluido.

4.4.2 Dilatación/contracción

Este caso está caracterizado por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases} \quad (4.32)$$

De esta forma, $d\vec{v} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx, \frac{\partial v}{\partial y} dy, \frac{\partial w}{\partial z} dz \right)$, por lo que las velocidades en los vértices del cubo de la **Figura 4.12** son:

$$\begin{aligned} d\vec{v}_A &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx, 0, 0 \right) ; & d\vec{v}_C &= \left(0, \frac{\partial v}{\partial y} dy, 0 \right) ; & d\vec{v}_D &= \left(0, 0, \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \\ d\vec{v}_B &= d\vec{v}_A + d\vec{v}_C ; & d\vec{v}_E &= d\vec{v}_A + d\vec{v}_D \\ d\vec{v}_F &= d\vec{v}_C + d\vec{v}_D ; & d\vec{v}_P &= d\vec{v}_A + d\vec{v}_C + d\vec{v}_D \end{aligned} \quad (4.33)$$

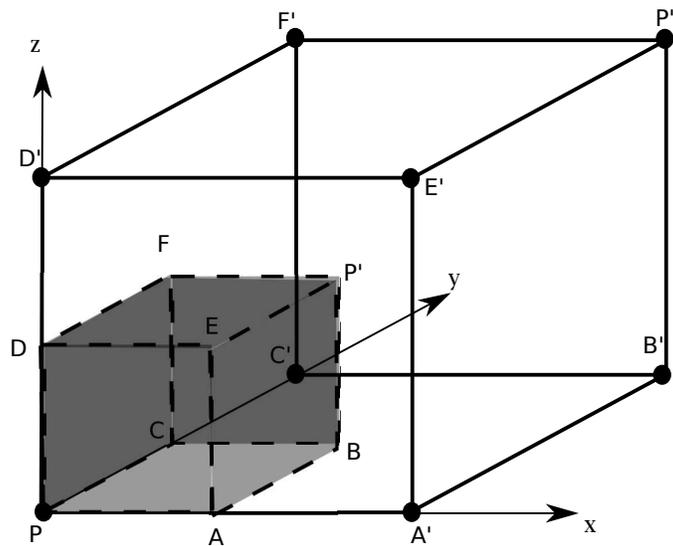


Figura 4.12: Dilatación.

Después de un tiempo dt , los vértices del volumen de control se han desplazado una distancia $d\vec{v}_i dt$, ocupando las posiciones A', B', C', \dots . Así, la tasa de deformación unitaria (cambio de longitud por unidad de tiempo y longitud) del elemento en las direcciones x, y, z , es $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$, respectivamente. Este tipo de deformación se denomina *dilatación/contracción cúbica*. En el caso de fluidos incompresibles se debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.34)$$

que expresa que el cambio total de volumen del elemento debe ser cero y de donde se deduce que al menos una de las derivadas parciales debe tener signo opuesto al de las otras, de modo que la deformación en una dirección sea compensada por la deformación opuesta en las otras, tal que el volumen se mantenga constante. Obviamente, ésta es simplemente la ecuación de continuidad de volumen deducida previamente ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$).

Introduzcamos el concepto de un tensor de deformación, ϵ_{ij} . Las componentes de la diagonal de este tensor corresponden a la tasas unitarias de dilatación/contracción, tal que $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$. Así, si el fluido es incompresible, la traza del tensor de deformación es nula (i.e., $\epsilon_{ii} = \nabla \cdot \vec{v} = 0$, donde se ha usado notación tensorial, tal que el subíndice repetido implica sumatoria sobre todos los posibles valores del subíndice: $i = x, y, z$).

4.4.3 Deformación angular

Consideremos el caso para el que $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$ son distintas de cero, y todo el resto de las derivadas son iguales a 0. En este caso se tiene que:

$$d\vec{v} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy, \frac{\partial v}{\partial x} dx, 0 \right) \quad (4.35)$$

Si consideramos la cara $ABCP$ del volumen de control, vemos que las velocidades son

$$\begin{aligned} d\vec{v}_A &= \left(0, \frac{\partial v}{\partial x} dx, 0 \right) ; \quad d\vec{v}_C = \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy, 0, 0 \right) \\ d\vec{v}_B &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy, \frac{\partial v}{\partial x} dx, 0 \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

y el desplazamiento de los vértices A , B y C a A' , B' y C' durante un intervalo de tiempo dt , está dado por $d\vec{v}_A dt$, $d\vec{v}_B dt$ y $d\vec{v}_C dt$, respectivamente. Los ángulos $d\alpha$ y $d\beta$ (**Figura 4.13**) se determinan como:

$$d\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} dt ; \quad d\beta = \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad (4.37)$$

donde se ha supuesto que los ángulos son infinitesimalmente pequeños, de modo que la tangente es aproximadamente igual al ángulo.

La deformación angular promedio en el plano $x - y$ es:

$$d\gamma = \frac{1}{2} (d\alpha + d\beta) \quad (4.38)$$

o sea:

$$d\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dt \quad (4.39)$$

y por lo tanto, la *tasa de deformación angular* en el plano $x - y$ es:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.40)$$

Este análisis puede hacerse en los planos $x - z$ y $y - z$, resultando:

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) ; \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4.41)$$

que genéricamente expresamos como:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.42)$$

y que representa los elementos fuera de la diagonal del tensor de deformación. Claramente, este resultado muestra que este tensor es simétrico ($\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$).

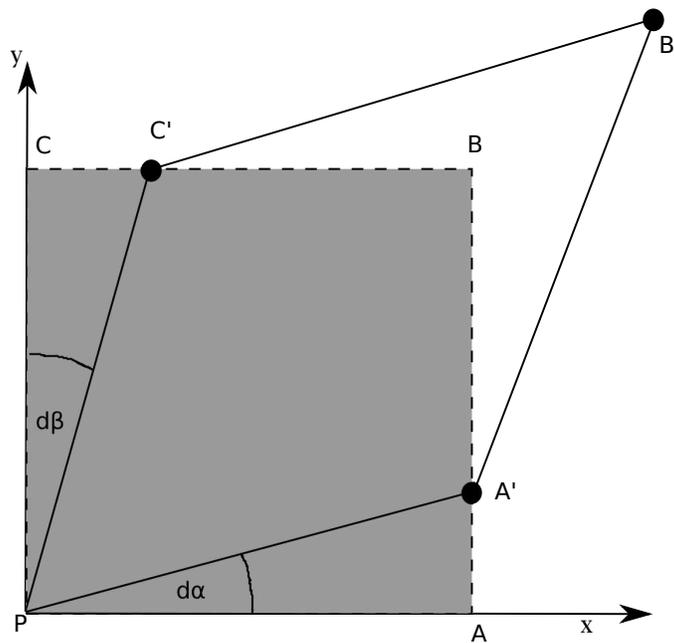


Figura 4.13: Deformación angular en el plano $x - y$.

4.4.4 Rotación

En caso que el ángulo $d\beta$ sea en la misma dirección de giro que $d\alpha$, el comportamiento es como si el volumen rotara en torno al eje z (**Figura 4.14**), con una velocidad angular en la dirección z , Ω_z , dada por:

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.43)$$

Repitiendo el análisis en las otras direcciones, es fácil ver que el vector velocidad angular, $\vec{\Omega}$ está dado por:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{v}) \quad (4.44)$$

Es usual trabajar, alternativamente, con el vector $\vec{\omega}$ que se denomina *vorticidad* y se define como:

$$\vec{\omega} = 2\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} \quad (4.45)$$

La vorticidad define un campo vectorial, que por construcción es *solenoidal*, es decir, se cumple siempre $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$. Por ello se dice que existe un paralelo o analogía entre los campos vectoriales $\vec{v}(x, y, z; t)$ y $\vec{\omega}(x, y, z; t)$. Ambos tienen divergencia nula (cuando el fluido es incompresible, en el caso de la velocidad; siempre en el caso de la vorticidad); es posible

definir líneas vorticosas (paralelas en todo punto a $\vec{\omega}$) así como existen líneas de corriente (paralelas en todo punto a \vec{v}); es posible definir un tubo vorticoso, a partir de las líneas vorticosas, en analogía con un tubo de flujo; etc.

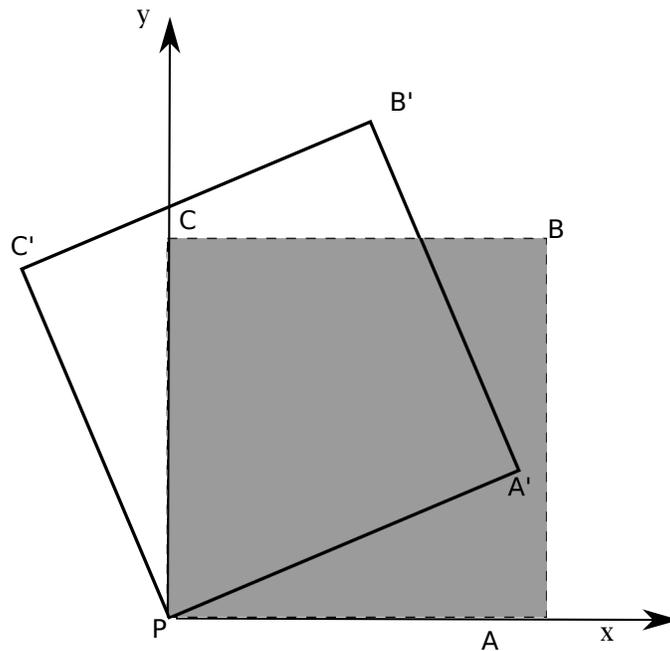


Figura 4.14: Rotación respecto del eje z .

Si $\vec{\omega} = 0$, el flujo se denomina *irrotacional*, mientras que en el caso contrario hablamos de un flujo *rotacional*. Un flujo irrotacional tiene un tasa nula de rotación de los elementos fluidos y lo contrario ocurre en el caso de un flujo rotacional. Es importante notar que esta es una propiedad infinitesimal, definida por los gradientes de velocidad del flujo, y que no da cuenta del movimiento de las porciones de fluido a nivel macroscópico. Así, es posible para un flujo rotacional tener trayectorias y líneas de corriente perfectamente rectilíneas. Del mismo modo, existen flujos cuyas trayectorias son curvas y sin embargo definen un flujo irrotacional.

En general, los flujos en las cercanías de paredes sólidas tienen gradientes de velocidad en la dirección normal a la pared (necesarios para cumplir con la condición de no resbamiento) que dan lugar a la existencia de vorticidad. Estos flujos, por lo tanto, son siempre rotacionales y es la viscosidad del fluido la que da lugar a esa rotacionalidad, en estos casos. Bajo este mismo argumento, flujos en los que no existan gradientes de velocidad serán siempre irrotacionales. Un caso posible para tal situación, es el del fluido ideal (que, como hemos discutido, no existe en la naturaleza), ya que éste no respeta la condición de no resbamiento.

Es interesante notar que si el flujo es irrotacional, entonces es posible encontrar una función escalar ϕ a partir de la cual es posible obtener el campo de velocidades. En efecto, del cálculo diferencial se sabe que si $\nabla \times \vec{v} = 0$, entonces existe una función escalar ϕ tal que $\vec{v} = \nabla\phi$. A la función ϕ se le denomina *función potencial*. Es fácil ver que si el fluido es incompresible, la función potencial debe cumplir con la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = 0 \quad (4.46)$$

Esta se conoce como ecuación de Laplace y si se resuelve sujeta a condiciones de borde, es posible definir completamente el campo de flujo. El estudio de las soluciones posibles para esta ecuación es una rama de la mecánica de fluidos que se denomina *teoría de flujo potencial*, que revisaremos más adelante en el curso.

4.4.5 Circulación

Ligada con la vorticidad se encuentra la *circulación*, que se define para una curva cerrada en el espacio, C , tal que corresponde a la integral de línea de la velocidad en esta curva:

$$\Gamma = \int_C \vec{v} \cdot \hat{t} dl \quad (4.47)$$

donde \hat{t} es el vector unitario tangente a la curva cerrada C . Considerando el teorema de Stokes, vemos que:

$$\Gamma = \int_S \nabla \times \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS \quad (4.48)$$

donde S es la superficie definida a partir de la curva cerrada C , y \hat{n} es el vector normal a la superficie. Se deduce de este resultado que la circulación Γ es el análogo del caudal cuando integramos la vorticidad en el área en lugar de la velocidad.

4.4.6 Combinación de movimientos y deformaciones

De este modo, hemos visto que una adecuada combinación de las derivadas parciales de $d\vec{v}$ define una dilatación/contracción (deformación lineal) en el elemento de fluido, una deformación angular de él, o una rotación. En el caso más general podemos ver que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & 0 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Capítulo 5

Dinámica de los fluidos

En este capítulo estudiaremos el movimiento de los fluidos teniendo en cuenta las fuerzas que lo originan, para lo cual derivaremos las ecuaciones matemáticas que representan los principios básicos que rigen el movimiento de un volumen infinitesimal de fluido. Estos principios básicos son: la segunda ley de Newton o el principio de conservación de la cantidad de movimiento; el principio de conservación de la energía o primera ley de la termodinámica, y la conservación de masa representada por ecuación de continuidad en caso que la densidad ρ sea constante, o la continuidad de masa en el caso contrario.

Finalmente, para describir completamente el movimiento de un fluido es necesario conocer las leyes constitutivas tales como la ecuación de estado que permite calcular la densidad del fluido en función de la temperatura y presión, o la ley de Newton-Navier para relacionar esfuerzos de corte con tasas de deformación angular.

5.1 Segunda ley de Newton aplicada al movimiento de los fluidos: Enfoque diferencial

Aplicamos la segunda ley de Newton sobre un volumen de control infinitesimal de dimensiones dx , dy y dz cuyo volumen es $dV = dx dy dz$. Este principio conservativo de momentum lo podemos escribir como

$$dm \vec{a} = d\vec{F} \quad (5.1)$$

donde $dm = \rho dV$ es la masa del elemento de fluido, \vec{a} es la aceleración que expresamos a partir del método de Euler como:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \quad (5.2)$$

En este punto es importante notar que, teniendo en cuentas algunos resultados vistos en el capítulo anterior, el término del lado izquierdo de (5.1) es, por ejemplo para la aceleración en x :

$$dm a_x = \rho \frac{Du}{Dt} dV = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u \right) dV \quad (5.3)$$

Luego, si sumamos 0 obtenemos:

$$dm a_x = \left(\rho \frac{Du}{Dt} + u \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \right) \right) dV = \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \rho u) \right) dV \quad (5.4)$$

que es el resultado de expresar el teorema del transporte de Reynolds a la propiedad extensiva momentum, $\rho \vec{v}$ (ρu en el caso analizado), y entonces podemos decir que la segunda ley de Newton es equivalente al principio de conservación del momentum.

Por otro lado, $d\vec{F}$ es la resultante de las fuerzas externas actuando sobre el volumen de control. Es conveniente descomponer el vector $d\vec{F}$ en dos grupos principales:

$$d\vec{F} = d\vec{F}_m + d\vec{F}_s \quad (5.5)$$

donde $d\vec{F}_m$ y $d\vec{F}_s$ son la resultante de las fuerzas másicas y superficiales que actúan en el volumen de control, respectivamente.

5.1.1 Fuerzas másicas

$d\vec{F}_m$ es el vector que da cuenta de las fuerzas másicas que actúan sobre el volumen de control, el cual ya estudiamos en la primera parte del capítulo de estática de los fluidos. Salvo casos particulares, $d\vec{F}_m$ viene dado solo por el campo gravitatorio terrestre, de manera que si escogemos un sistema de coordenadas cuya componente z es vertical opuesta a la aceleración de gravedad,

$$d\vec{F}_m = \vec{g} \rho dV = \left(0\hat{i} + 0\hat{j} - g\hat{k} \right) \rho dV \quad (5.6)$$

En términos genéricos, podemos decir las fuerzas másicas en la dirección $i = x, y, z$ son:

$$dF_{mi} = \rho g_i dV \quad (5.7)$$

5.1.2 Fuerzas superficiales

$d\vec{F}_s$ denota la resultante de las fuerzas superficiales actuando sobre el volumen de control. Como hemos definido con anterioridad, sobre cada una de las caras del volumen de control actúan tres de esfuerzos, τ_{ij} , dos de los cuales son tangenciales a la superficie, y uno es

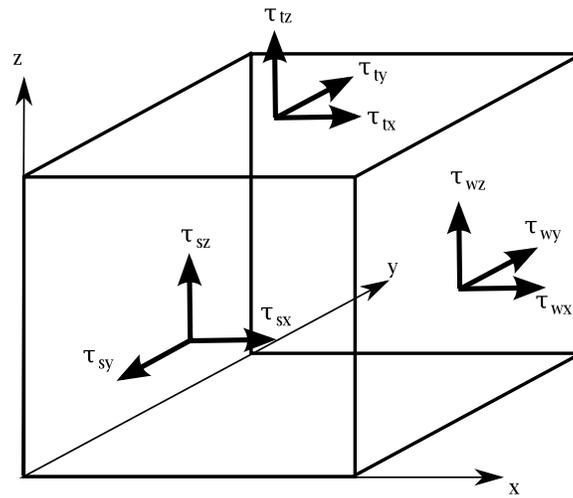


Figura 5.1: Definición de esfuerzos actuando sobre caras del volumen de control.

normal (ver **Figura 5.1**). El subíndice i se refiere a la cara sobre la cual se ejerce el esfuerzo y j la dirección.

Analicemos primero la resultante en x de los esfuerzos, para lo cual debemos recordar la convención de signos positivos que se muestra en la **Figura 5.2**. Teniendo en cuenta esta convención de signos y la nomenclatura para las caras del volumen de control basada en los puntos cardinales, es fácil ver que la resultante de fuerzas en x está dada por:

$$dF_{sx} = (\tau_{ex} - \tau_{wx}) dydz + (\tau_{nx} - \tau_{sx}) dx dz + (\tau_{tx} - \tau_{bx}) dx dy \quad (5.8)$$

Luego, si llamamos $\tau_{wx} = \tau_{xx}$, $\tau_{sx} = \tau_{yx}$, $\tau_{bx} = \tau_{zx}$, y expresamos los esfuerzos en las respectivas caras opuestas a partir de una expansión de primer orden de la serie de Taylor, tal que

$$\begin{aligned} \tau_{ex} &= \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \\ \tau_{nx} &= \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \\ \tau_{tx} &= \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (5.9)$$

se obtiene que la resultante de fuerzas superficiales en la dirección x , dF_{sx} , es:

$$dF_{sx} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (5.10)$$

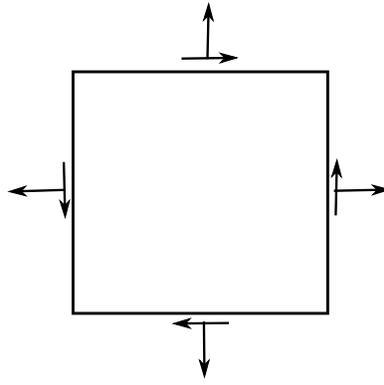


Figura 5.2: Convención de signos positivo para esfuerzos normales y de corte.

Análogamente,

$$dF_{sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (5.11)$$

y

$$dF_{sz} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (5.12)$$

De acuerdo con la notación tensorial, obtenemos¹

$$dF_{si} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} dV \quad (5.13)$$

en donde τ_{ij} es un tensor de 9 componentes, el que además es simétrico tal que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ²

De esta forma, la segunda ley de Newton considerando el campo gravitatorio terrestre queda escrita como:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} + \frac{d\vec{F}_s}{dV} \quad (5.14)$$

o bien

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho g_z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

¹Recuerde que subíndice repetido indica suma

²Note que el tensor sea simétrico no es arbitrario sino que es el resultado que se obtiene de conservar el momentum angular

o bien

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (5.16)$$

5.1.3 Leyes constitutivas

En este punto es necesario conocer las leyes constitutivas que permitan relacionar el tensor de esfuerzos con alguna de las variables del flujo, en particular, con la presión y el tensor de deformaciones ϵ_{ij} . En otras palabras necesitamos encontrar un equivalente a la unidimensional ley de Newton-Navier que sea válida para un flujo en tres dimensiones. Esta ley la podemos encontrar si:

1. El fluido es un continuo.
2. Existe una relación lineal entre esfuerzos tangenciales τ_{ij} y la tasa de deformación angular ϵ_{ij} .
3. El fluido es isotrópico de manera que la ley de deformación es independiente de la dirección, o del sistema de coordenadas que se utilice.
4. Cuando las tasas de deformación angular son nulas, los esfuerzos tangenciales deben anularse mientras que los esfuerzos normales se reducen a la presión hidrostática. En tal caso

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (5.17)$$

donde δ_{ij} es el denominado delta de Kronecker, definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.18)$$

y el signo negativo se debe a que la presión es, por definición, un esfuerzo de compresión.

Con estas hipótesis y haciendo uso de las propiedades de los tensores de deformación y de esfuerzos, se puede demostrar que

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \delta_{ij}(-p + \lambda\nabla \cdot \vec{v}) \quad (5.19)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica, λ es el denominado segundo coeficiente de viscosidad, el que es una propiedad del fluido relacionada sólo con la tasa de deformación lineal, vale decir, con la tasa de expansión y compresión de los elementos de fluidos $\nabla \cdot \vec{v}$.

Una conclusión que se obtiene es que en fluidos reales en movimiento, el promedio de los esfuerzos normales, denominado presión media \bar{p} , difiere de la presión termodinámica ya que:

$$\bar{p} = \frac{1}{3}\tau_{ii} = -p + \lambda\nabla \cdot \vec{v} + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{v} \quad (5.20)$$

de manera que en general $\bar{p} \neq -p$. Sin embargo, para fluidos incompresibles que cumplen con $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, el promedio de los esfuerzos normales efectivamente es igual a la presión termodinámica, y por lo tanto

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.21)$$

5.1.4 Ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles

Finalmente, reemplazando los resultados anteriores en (5.1), obtenemos las denominadas *ecuaciones de Navier Stokes* para fluidos incompresibles

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}) \quad (5.22)$$

Suponiendo además μ es homogéneo, y notando que

$$\frac{\partial p\delta_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (5.23)$$

entonces

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \quad (5.24)$$

en donde el último término de mano derecha es cero dado continuidad $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$. Por lo tanto

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5.25)$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

o bien

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (5.27)$$

A continuación, sea h un eje orientado verticalmente hacia arriba. En este caso (ver además **Figura 5.3**)

$$\vec{g} = -g \nabla h \quad (5.28)$$

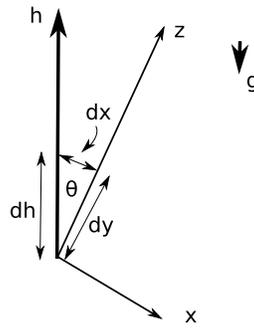


Figura 5.3: Definición de eje vertical h .

Por lo tanto,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p + \rho gh) + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5.29)$$

donde $p + \rho gh$ es denominada la presión motriz que notaremos como \hat{p} . Este nombre se debe a que es la acción conjunta de la gravedad y el gradiente de presiones la puede generar el movimiento, y no los términos viscosos que tienen a frenar el movimiento. El que sea la acción conjunta entre gravedad y gradientes de presiones se ve en el concepto de presión hidrostática que vimos anteriormente, en donde la presión era tal de balancear la gravedad, y por lo tanto la resultante de ambos términos no induce el movimiento vertical del fluido a pesar que tanto los gradientes de presión como la gravedad pueden, cada uno por separado, generar el movimiento del fluido.

5.1.5 Ejemplos de aplicación

Las ecuaciones de Navier-Stokes más la ecuación de continuidad son un sistema cerrado de 4 ecuaciones y 4 incógnitas (\vec{v} y p), para resolver problemas de mecánica de fluidos incompresibles. Sin embargo, sólo es posible resolver un cierto número reducido de casos³ ya que las ecuaciones de Navier-Stokes son no lineales (término de aceleraciones convectivas), lo que lleva a una serie de fenómenos conocidos como inestabilidades del flujo que marcan la transición entre flujos laminares y turbulentos. Para los objetivos del curso, sólo nos centraremos en resolver algunos problemas laminares.

Veamos primero el caso del flujo entre placas planas infinitas que hemos analizado anteriormente, en donde imponemos que la placa superior se mueve con una velocidad constante u_0

³Es más, el Clay Mathematics Institute enunció los problemas Millenium y ofrece premios millonarios a quién pueda solucionarlos. Uno de estos problemas es demostrar la existencia de una solución suave para las ecuaciones de Navier-Stokes. <http://www.claymath.org/millennium/>

mientras que la placa inferior permanece fija (**Figura 5.4**). Consideremos que el escurrimiento es laminar, unidireccional ($v = w = 0$), permanente ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), y además incompresible. Aceptaremos sin embargo que la presión del flujo sea variada.

El hecho que el flujo sea incompresible nos permite obtener que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.30)$$

pero como es además unidireccional, la ecuación de continuidad queda reducida a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.31)$$

Por otro lado, analicemos los términos de la aceleración según x ,

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5.32)$$

Primero, el término asociado a la derivada temporal es nulo dado que el flujo es permanente, después, v y w son nulas de manera que los últimos dos términos son nulos también. Y por último, el término asociado a variaciones longitudinales de u en x es también cero por continuidad. De igual forma se llega a que la aceleración en y y z son cero también. Y por lo tanto, las ecuaciones de Navier-Stokes según x queda reducida a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5.33)$$

para la componente x ,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0 \quad (5.34)$$

para y y

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = 0 \quad (5.35)$$

para z . Note que los términos viscosos son cero en las ecuaciones de movimiento en y y z ya que el flujo es unidireccional. Además, como z es el eje de coordenadas vertical, (5.35) no es más que la ley hidrostática de presiones

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (5.36)$$

Este último resultado nos muestra el valor de definir la presión motriz, ya que comprime en un solo término el efecto neto que tienen la acción conjunta de los dos principales términos capaces de inducir el movimiento: los gradientes de presión y la gravedad.

Analicemos en detalle la ecuación de Navier-Stokes según x . Como mencionamos en el enunciado, aceptaremos que el gradiente de presiones motriz según x sea distinto de cero. Por

otro lado, el primero de los tres términos viscosos es cero dado continuidad, y por enunciado podemos decir que el segundo de los términos viscosos (aquel relacionado con y) es también cero dado que estamos analizando un problema bi-dimensional. Es así que la ecuación de movimiento según x queda:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5.37)$$

la que nos indica que las condiciones permanentes y uniformes se alcanzan mediante un balance entre el gradiente de presiones motriz que induce el movimiento, y la fricción que se encarga de frenarlo. Además, ya que por enunciado el flujo es uniforme en x , el $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}$ no puede ser otra cosa que una constante independiente de x , y por lo tanto la solución de (5.37) viene dada por un polinomio cuadrático de u en z .

$$u(z) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \frac{z^2}{2} + Az + B \quad (5.38)$$

de donde A y B son constantes de integración que dependen de las condiciones de borde. Dado que $u(z = 0) = 0$, $B = 0$. Por otro lado, si imponemos que $u(z = e) = u_0$ donde e es el espesor de entre capas, obtenemos que

$$u(z) = u_0 \frac{z}{e} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \left(1 - \frac{z}{e}\right) ez \quad (5.39)$$

que generaliza el caso del flujo de Couette dado que si $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0$, se recupera el perfil lineal de velocidades.

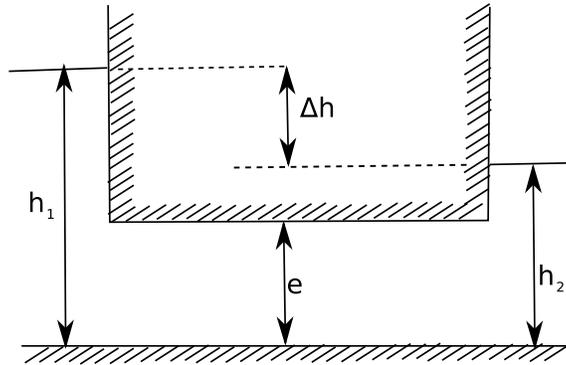


Figura 5.4: Ejemplo de flujo entre dos estanques.

Analicemos el caso $u_0 = 0$, pero $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} < 0$, cosa que se puede alcanzar con un flujo entre dos estanques como se muestra en la **Figura 5.4**. En este caso, el gradiente de presiones motriz es

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \gamma \frac{(h_2 - h_1)}{L} = -\gamma \frac{\Delta h}{L} \quad (5.40)$$

y por lo tanto el perfil de velocidades es

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \gamma \frac{\Delta h}{L} \left(1 - \frac{z}{e}\right)^2 \quad (5.41)$$

que es una parábola, con máximo de velocidad que se alcanza en $z = e/2$ igual a

$$u_{max} = \frac{1}{8\mu} \gamma \frac{\Delta h}{L} e^2 \quad (5.42)$$

Además, la velocidad media es igual a

$$\bar{u} = \frac{1}{e} \int_0^e u(z) dz = \frac{1}{12\mu} \gamma \frac{\Delta h}{L} e^2 \quad (5.43)$$

y por lo tanto, el caudal por unidad de ancho que circula es igual a

$$q = \int_0^e u(z) dz = \frac{1}{12\mu} \gamma \frac{\Delta h}{L} e^3 \quad (5.44)$$

5.3 Ecuaciones de Euler

Consideremos el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible, tal que

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (5.45)$$

A continuación, consideramos el caso particular en que el fluido es ideal, vale decir $\mu = 0$, y por lo tanto las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} \quad (5.46)$$

Además, consideremos que el flujo es irrotacional, cosa que vimos que queda expresada como $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$, por lo tanto,

$$\nabla \times \vec{\omega} = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (5.47)$$

De esta forma, vemos que la siguiente igualdad

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (5.48)$$

se reduce a

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (5.49)$$

dado que el último término de mano derecha de (5.48) es cero porque el flujo es irrotacional. De esta forma, las ecuaciones de momentum para un flujo irrotacional de un fluido ideal quedan reducidas a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} \quad (5.50)$$

Reorganizando (5.50), y recordando que estamos considerando un flujo incompresible, se obtiene:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g \nabla \left(\frac{1}{2g} \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{p}{\gamma} + h \right) = 0 \quad (5.51)$$

De esta forma, definimos B como

$$B = \frac{1}{2g} \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{p}{\gamma} + h \quad (5.52)$$

el que es conocido como Bernoulli, suma de Bernoulli o energía por unidad de peso. Note que $\vec{v} \cdot \vec{v}$ es el cuadrado de la rapidez del flujo.

Analicemos algunos casos particulares. Primero, si el flujo es permanente se obtiene que

$$\nabla B = 0 \quad (5.53)$$

lo que indica que B es constante en el espacio. Entonces, si el flujo de un fluido ideal es irrotacional y permanente, entonces el Bernoulli es constante y homogéneo en todo el espacio del fluido.

Consideremos ahora el caso en que el flujo es rotacional, por lo tanto se cumple con (5.48), y además permanente. En este caso se cumple que

$$\nabla B = \frac{1}{g} \vec{v} \times \vec{\omega} \quad (5.54)$$

Luego, si proyectamos el vector ∇B a lo largo de un elemento de línea de corriente $d\vec{r}$, obtenemos

$$\nabla B \cdot d\vec{r} = \frac{1}{g} (\vec{v} \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r} \quad (5.55)$$

entonces, por definición sabemos que \vec{v} y $d\vec{r}$ son colineales, y que el vector $\vec{v} \times \vec{\omega}$ es perpendicular a \vec{v} , por lo tanto

$$(\vec{v} \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.56)$$

y

$$\nabla B \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.57)$$

lo cual nos indica que si el flujo es permanente y rotacional, B es constante a lo largo de una línea de corriente. Si analizamos el mismo caso pero para una línea vorticiosa tal que $d\vec{r} \times \vec{\omega} = 0$, se obtiene que B es también constante a lo largo de estas líneas.

Finalmente, si volvemos al primer caso de un flujo irrotacional e impermanente, obtenemos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g \nabla B = 0 \quad (5.58)$$

entonces, si integramos a lo largo de una línea de corriente entre dos puntos 1 y 2, obtenemos

$$\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{r} + B_2 - B_1 = 0 \quad (5.59)$$

5.3.1 Ejemplo tubo en U

Consideremos un tubo en U que se muestra en la **Figura 5.5**, donde imponemos inicialmente una diferencia de elevación entre las superficies libres de los lados derecho e izquierdo (Δh_o), y vemos cómo evoluciona el sistema.

Aplicamos el resultado de (5.59). Primero, tomemos una línea de corriente que va de izquierda a derecha y un datum ubicado en la situación de equilibrio estático, si Δh es la diferencia de elevación entre ambos extremos del tubo, obtenemos que $B_2 = v_2^2/2g + \Delta h/2$ y $B_1 = v_1^2/2g - \Delta h/2$, donde la presión relativa $P_2 = P_1 = 0$ ya que nos situamos en la superficie libre. Ya que el diámetro del tubo es constante por enunciado, el flujo es uniforme a lo largo de una línea de corriente, de manera que el argumento de la integral es constante, y entonces

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} l + \Delta h = 0 \quad (5.60)$$

donde $u = v_1 = v_2$. Por otro lado, por cinemática sabemos que

$$u = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta h}{\partial t} \quad (5.61)$$

y entonces

$$\frac{d^2 \Delta h}{dt^2} + \frac{2g}{l} \Delta h = 0 \quad (5.62)$$

que se resuelve considerando la condición inicial $\Delta h = \Delta h_o$ en $t = 0$, y que la velocidad es cero. De esta forma se obtiene

$$\Delta h = \Delta h_o \cos \sqrt{\frac{2g}{l}} t \quad (5.63)$$

que corresponde a una oscilación caracterizada por la frecuencia natural $\sqrt{\frac{2g}{l}}$, la que no depende de la masa (densidad) del fluido oscilando. Un resultado bastante similar obtuvo Galileo Galilei a mediados de 1600, cuando evidenció que la frecuencia de oscilación de un péndulo depende solamente de su largo, y no de la masa colgada.

5.4 Conceptos asociados a Bernoulli

5.4.1 Puntos de estancamiento

Son aquellos donde la velocidad es cero $\vec{v} = 0$, y se producen cuando la curvatura de las líneas de corriente tienden a infinito. Por ejemplo, considere el estanque de la **Figura 5.6A**, en particular, tomemos una línea de corriente ubicada en la base, lo que nos permite ver que el vértice inferior derecho (punto E) es un punto de estancamiento.

Luego, si tomamos un punto A alejado de E , sabemos que si el flujo es permanente obtenemos

$$B_E = B_A \Rightarrow \frac{P_E}{\gamma} = \frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} \quad (5.64)$$

donde $P_A = \gamma H$ por hidrostática. Entonces la altura de presión en E se ubica por sobre la superficie libre del estanque, en una distancia igual a $\Delta h = \frac{v_A^2}{2g}$. Esta altura puede medirse

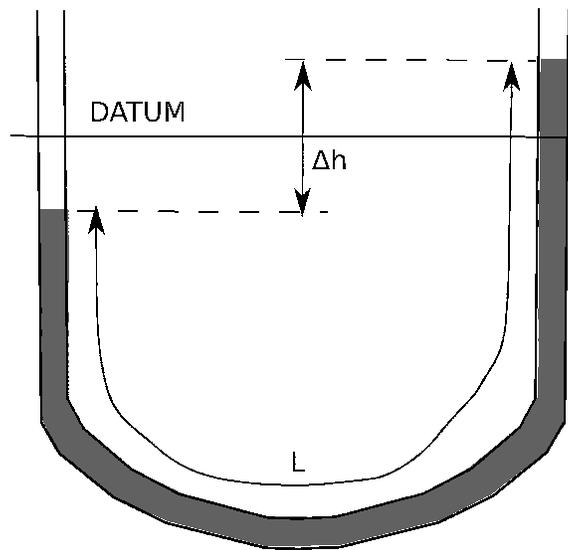


Figura 5.5: Tubo en U.

con un tubo piezométrico (o simplemente piezómetro, **Figura 5.6B**) donde la altura dentro del tubo sería igual a Δh .

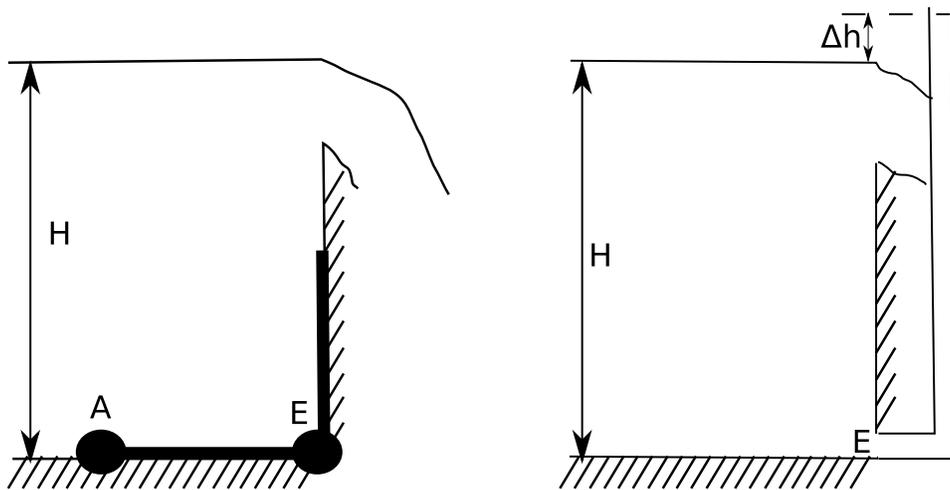


Figura 5.6: Ejemplo de puntos de estancamiento.

5.4.2 Tubo de Pitot de estancamiento

Es un instrumento usual en los aviones (**Figura 5.7**), y sirve para medir velocidades del flujo a partir de dos piezómetros ubicados como se muestra en la **Figura 5.7**. Se deja propuesto demostrar cómo es su funcionamiento, para lo cual debe analizar los Bernoulli en los puntos *A* y *B*.

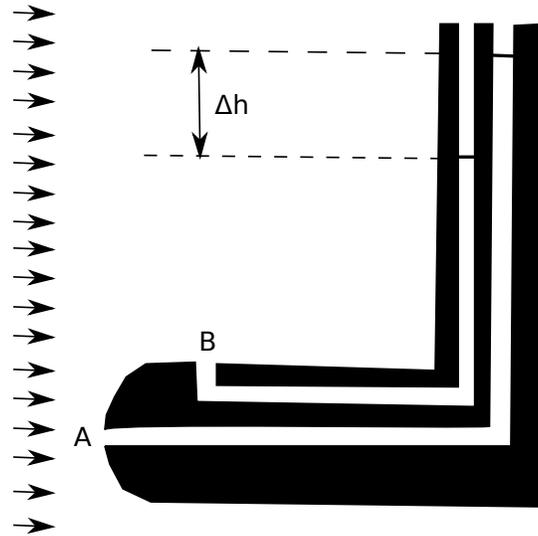


Figura 5.7: Tubo de Pitot.

5.5 Teorema general de la energía

Hemos deducido que en el caso que la viscosidad no controla el flujo, el Bernoulli o energía por unidad de peso del flujo se conserva, ya sea en todo el campo de flujo (flujo irrotacional y fluido ideal) o bien a lo largo de las líneas de corriente o vorticosas (caso de flujo rotacional y fluido ideal). Por otro lado, resulta evidente que en presencia de esfuerzos viscosos, que corresponden esencialmente a una fuerza de roce actuando en el fluido, parte de la energía mecánica de flujo se disipa en forma de calor. En este caso, el Bernoulli no se conserva en el campo de flujo, sino que disminuye a lo largo del escurrimiento por la disipación viscosa de la energía. Para analizar este problema, que corresponde al caso típico de interés en ingeniería ya que los flujos reales en conductos de cualquier tipo son siempre rotacionales, es necesario recurrir a la primera ley de la termodinámica.

Consideremos la energía total del flujo,

$$e = u + gh + \frac{v^2}{2} \quad (5.65)$$

donde e denota la energía específica total del flujo, u la energía específica interna y los dos últimos términos representan la energía específica potencial y cinética, respectivamente. Si E es la energía contenida en un volumen de control V , entonces

$$E = \int_V \rho e dV \quad (5.66)$$

La primera ley de la termodinámica aplicada a un sistema de fluido se expresa como:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (5.67)$$

donde \hat{Q} denota el calor entregado externamente al sistema y W el trabajo mecánico realizado por el sistema sobre el medio externo.

Si consideramos un volumen de control, el Teorema del Transporte de Reynolds permite reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \int_S \rho e \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (5.68)$$

donde S representa la superficie del volumen de control y \hat{n} el vector unitario perpendicular al elemento de superficie dS .

El trabajo W puede ser descompuesto en un trabajo externo, W_e (bomba o turbina), y un trabajo asociado al escurrimiento, llamado trabajo de flujo, W_f (trabajo realizado por las fuerzas superficiales del fluido), el cual podemos expresar como

$$\frac{dW_f}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \tau_{nt} dV \quad (5.69)$$

ya que los elementos de trabajo $dW = d\vec{F} \cdot d\vec{r} = d\vec{\tau} \cdot (dS d\vec{r})$. τ_{nt} representa los esfuerzos normales o tangenciales del fluido. Luego, si descomponemos el trabajo del flujo en términos normales y tangenciales $W_f = W_n + W_t$, reconocemos que $d\vec{r} = \vec{v} dt$, entonces

$$\frac{dW}{dt} = \int_S p(\vec{v} \cdot \hat{n}) dS + \frac{dW_t}{dt} + \frac{dW_e}{dt} \quad (5.70)$$

donde p es la presión, y por lo tanto

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \int_S \rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW_t}{dt} - \frac{dW_e}{dt} \quad (5.71)$$

Para un flujo permanente obtenemos

$$\int_S (\rho u + \gamma B) (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW_t}{dt} - \frac{dW_e}{dt} \quad (5.72)$$

y entonces, si consideramos un volumen de control definido como un tubo de flujo (**Figura 5.8**), vemos que en la superficie S_3 no existe intercambio con el medio, mientras que en las secciones S_1 y S_2 existen gastos máxicos

$$G_1 = \int_{S_1} \rho_1 \vec{v}_1 \hat{n}_1 dS_1 = - \int_{S_1} \rho_1 v_1 dS_1 \quad (5.73)$$

y

$$G_2 = \int_{S_2} \rho_2 \vec{v}_2 \hat{n}_2 dS_2 = \int_{S_2} \rho_2 v_2 dS_2 \quad (5.74)$$

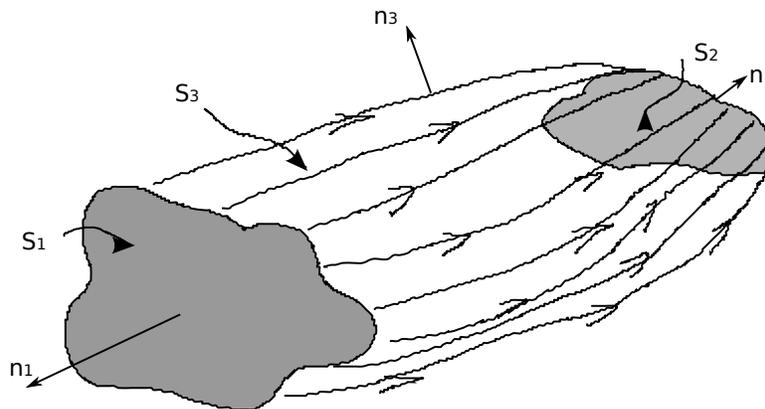


Figura 5.8: Definición de volumen de control a partir de tubo de flujo.

Por otro lado, si consideramos propiedades homogéneas en las secciones 1 y 2, y como el flujo es permanente se cumple que $G_1 = G_2 = G$, entonces (5.71) queda escrita como:

$$G (g(B_2 - B_1) + (u_2 - u_1)) = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW_t}{dt} - \frac{dW_e}{dt} \quad (5.75)$$

que es conocida como la ecuación de Bernoulli en condiciones permanente, que si recuerdan, es válida para analizar dos puntos en los extremos de un tubo de flujo.

Además, si vemos la definición ed Bernoulli obtenemos que

$$B = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h \quad (5.76)$$

donde el primer término da cuenta de la energía cinética, el último término la energía potencial y el término asociado a la presión da cuenta de los efectos de la presión los que podemos llamar como energía de presión por unidad de peso. Si vemos las dimensiones de B vemos que tiene unidades de longitud, específicamente de alturas, resultando que los tres términos de B son además conocidos como alturas de velocidad, presión y geométrica, respectivamente.