Clase Auxiliar 6 CC52B Computación Gráfica

Tema : Representación de curvas mediante splines
Autor : Alvaro Neira Reyes
Fecha : Viernes 14 de Mayo 2004

Problema 1

a) Dados dos puntos $p_0 = \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 2{,}1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $p_1 = \begin{pmatrix} 3{,}1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, y dado que las derivadas $\frac{dx_0}{dt}, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dz_1}{dt}$ son todas 0 en esos puntos, encuentre la curva de interpolación cúbica de Hermite, como una fórmula para $x(t), y(t)$ y $z(t)$ que pasa a través de estos puntos con la derivada especificada.

¿Qué podemos decir acerca de las pendientes no paramétricas $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$, etc. cuando las pendientes paramétricas son 0?

Encuentre el valor numérico de las coordenadas en la curva para $t = 1/3$ y $t = 2/3$.

b) Encuentre la curva de interpolación de Hermite cúbica para los mismos puntos, pero esta vez todas las derivadas paramétricas son 1.

c) Compare las curvas de a y b y comente.

Solución

a)

Curvas de Hermite:

$$P(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \ldots \\ p_1 \ldots \\ p'_0 \ldots \\ p'_1 \ldots \end{bmatrix}$$

Se reemplaza en esta fórmula los datos dados:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}1 & 2{,}1 & 3 \\ 3{,}1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se multiplican las matrices :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} -4 & 4{,}2 & 8 \\ 6 & -6{,}3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1{,}1 & 2{,}1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = -4t^3 + 6t^2 + 1{,}1 \\ y(t) = 4{,}2t^3 - 6{,}3t^2 + 2{,}1 \\ z(t) = 8t^3 - 12t^2 + 3 \end{array}}$$

Las pendientes paramétricas no tienen una relación muy directa con las no paramétricas. De hecho, estas últimas no son 0 ni tienen por qué serlo.

Evaluando el punto en t= 1/3 :

$x(\frac{1}{3}) = -4(\frac{1}{3})^3 + 6(\frac{1}{3})^2 + 1{,}1 = 1{,}619$
$y(\frac{1}{3}) = 4{,}2(\frac{1}{3})^3 - 6{,}3(\frac{1}{3})^2 + 2{,}1 = 1,556$
$z(\frac{1}{3}) = 8(\frac{1}{3})^3 - 12(\frac{1}{3})^2 + 3 = 1,964$

Evaluando el punto en t= 2/3 :

$x(\frac{2}{3}) = -4(\frac{2}{3})^3 + 6(\frac{2}{3})^2 + 1{,}1 = 2{,}581$
$y(\frac{2}{3}) = 4{,}2(\frac{2}{3})^3 - 6{,}3(\frac{2}{3})^2 + 2{,}1 = 0{,}544$
$z(\frac{2}{3}) = 8(\frac{2}{3})^3 - 12(\frac{2}{3})^2 + 3 = 0{,}037$

b)

Se repite el procedimiento con los nuevos valores:

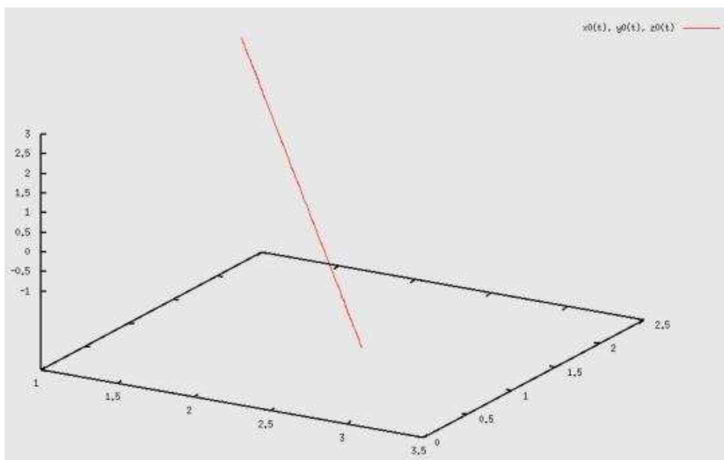
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}1 & 2{,}1 & 3 \\ 3{,}1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} -2 & 6{,}2 & 10 \\ 3 & -9{,}3 & -15 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1{,}1 & 2{,}1 & 3 \end{bmatrix}$$

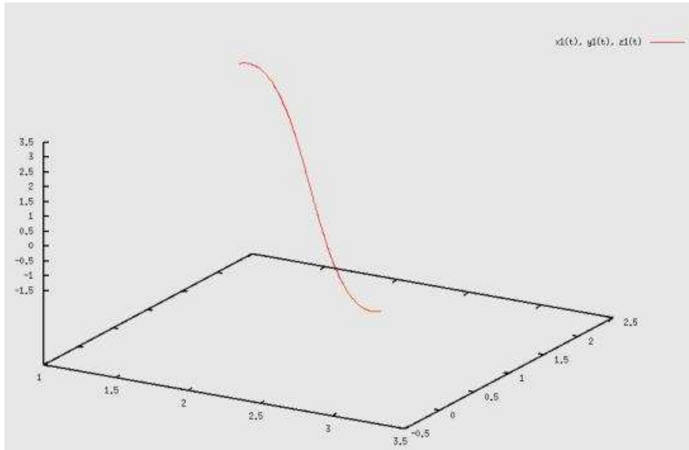
$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = -2t^3 + 3t^2 + t + 1{,}1 \\ y(t) = 6{,}2t^3 - 9{,}3t^2 + t + 2{,}1 \\ z(t) = 10t^3 - 15t^2 + t + 3 \end{array}}$$

c)

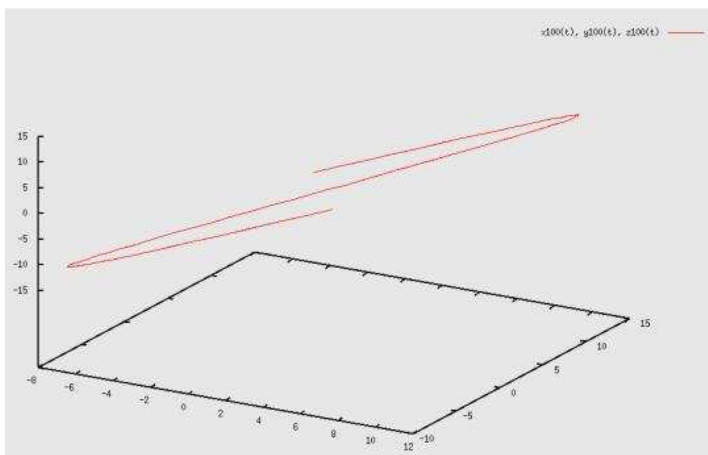
Si se grafica la curva de Hermite con pendientes 0 se obtiene lo siguiente, un segmento de recta



Con pendientes 1, la curvatura aumenta:



Como se puede inferir, la curvatura sera mayor mientras mayor sean las pendientes paramétricas en los extremos. Como ejemplo, esta sería la curva de Hermite si las pendientes fueran todas 100:



Problema 2

Se tienen los puntos $k_3, \ldots, k_7$ y se sabe que son knots de una Uniform Nonrational B-Spline. Además se tienen las pendientes s_3 y s_7 de los puntos extremos. Esprese un sistema de ecuaciones para determinar el conjunto de puntos de control para los cuales los knots dados son válidos.

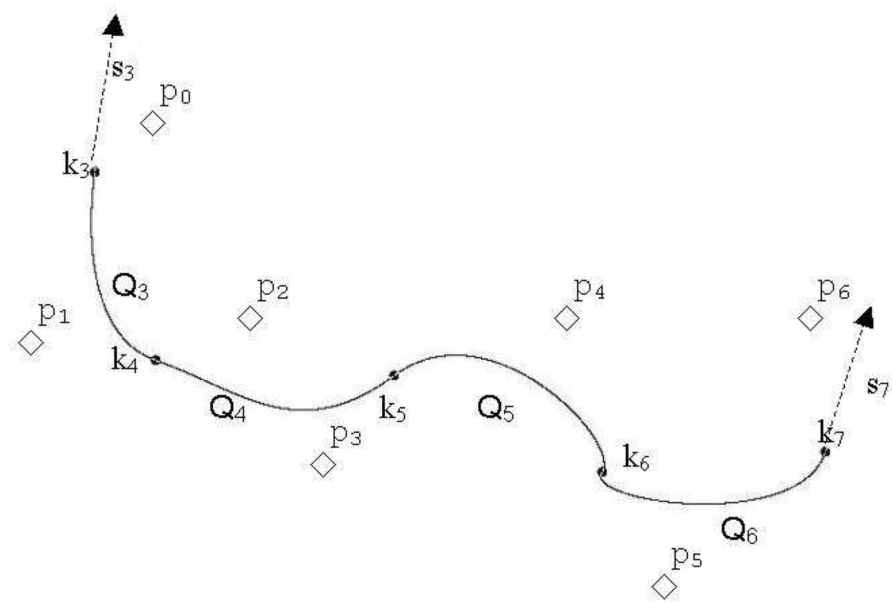
Solución

Una Uniform Nonrational B-Spline con m+1 puntos de control tiene:

- m+1 puntos de control
- m-2 segmentos de curva
- m-1 knots

En este caso tenemos 5 knots, por lo tanto:

- m=6
- se tienen 7 puntos de control $(p_0, \ldots, p_6)$
- se tienen 4 segmentos de curva a determinar $(Q_3, \ldots, Q_6)$
- se tienen 5 knots $(k_3, \ldots, k_7)$



Este problema se hace al revés. Pues la parte de la solución está dada (los knots), y se debe determinar los puntos de control que los originaron, cuando usualmente se dan los puntos de control para calcular los knots y segmentos de curvas.

Lo que haremos será encontrar 7 ecuaciones para armar el sistema de 7 incógnitas vectoriales (los puntos de control). Para cada segmento Q_i, la fórmula dada para calcularse a partir de los puntos de control (con grado 3) es:

$$Q_i(t) = [(t{-}t_i)^3 \quad (t{-}t_i)^2 \quad (t{-}t_i) \quad 1]\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{i-3}\ldots \\ p_{i-2}\ldots \\ p_{i-1}\ldots \\ p_i\ldots \end{bmatrix}((t{-}t_i) \in [0,1])$$

Sabemos que el principio de cada segmento $Q_i((t-t_i) = 0)$, es el knot k_i:

$$Q_i(t_i) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{i-3}\dots \\ p_{i-2}\dots \\ p_{i-1}\dots \\ p_i\dots \end{bmatrix} = k_i$$

entonces

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -p_{i-3} + 3p_{i-2} - 3p_{i-1} + p_i \\ 3p_{i-3} - 6p_{i-2} + 3p_{i-1} \\ -3p_{i-3} + 3p_{i-1} \\ p_{i-3} + 4p_{i-2} + p_{i-1} \end{bmatrix} = k_i$$

De lo cual sólo sobrevive la última fila, entoces se reduce a:

$$\frac{p_{i-3} + 4p_{i-2} + p_{i-1}}{6} = k_i$$

de k_3 a k_6. O sea, tenemos las siguientes 4 ecuaciones:

$p_0 + 4p_1 + p_2 = 6k_3$

$p_1 + 4p_2 + p_3 = 6k_4$

$p_2 + 4p_3 + p_4 = 6k_5$

$p_3 + 4p_4 + p_5 = 6k_6$

Para usar la ecuación inicial con k_7, se debe evaluar Q_6 con $t = t_{i+1}$. Cabe notar que si evaluáramos cada Q_i anterior en $t = t_{i+1}$, se llegaría a las mismas ecuaciones anteriores. De hecho al evaluar $Q_6(t = t_{i+1})$, la ecuación con k_7 tiene la misma forma que aquéllas:
$p_4 + 4p_5 + p_6 = 6k_7$

Pero faltan 2 ecuaciones más. Cabe señalar que no es posible extraer más ecuaciones independientes sólo con los datos ya utilizados, pues un conjunto de knots no tiene un conjunto único de puntos de control para los cuales hacen una Uniform Nonrational B-Spline.

Entences lo que debe usarse son las 2 pendientes dadas. La derivada de cualquier Q_i con respecto a t es:

$$Q_i'(t) = [3(t-t_i)^2 \quad 2(t-t_i) \quad 1 \quad 0]\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -p_{i-3}+3p_{i-2}-3p_{i-1}+p_i \\ 3p_{i-3}-6p_{i-2}+3p_{i-1} \\ -3p_{i-3}+3p_{i-1} \\ p_{i-3}+4p_{i-2}+p_{i-1} \end{bmatrix}$$

La pendiente dada s_3 es igual a Q_3 con $t = t_3$:

$$Q_3'(t_3) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -p_0+3p_1-3p_2+p_3 \\ 3p_0-6p_1+3p_2 \\ -3p_0+3p_2 \\ p_0+4p_1+p_2 \end{bmatrix} = s_3$$

$$\frac{-3p_0+3p_2}{6} = s_3$$

Ya se tiene otra ecuación. Ahora utilizamos s_7 que es igual a $Q_6'(t_7)$.

$$Q_6'(t_7) = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 0]\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -p_3+3p_4-3p_5+p_6 \\ 3p_3-6p_4+3p_5 \\ -3p_3+3p_5 \\ p_3+4p_4+p_5 \end{bmatrix} = s_7$$

$$\frac{-3p_4+3p_6}{6} = s_7$$

Con esto tenemos las 7 ecuaciones independientes que se resumen a continuación:

$$\boxed{\begin{array}{l} p_0+4p_1+p_2 = 6k_3 \\ p_1+4p_2+p_3 = 6k_4 \\ p_2+4p_3+p_4 = 6k_5 \\ p_3+4p_4+p_5 = 6k_6 \\ p_4+4p_5+p_6 = 6k_7 \\ -p_0+p_2 = 2s_3 \\ -p_4+p_6 = 2s_7 \end{array}}$$

Preguntas:

1. ¿Cuántos puntos de control se necesitan para construir una curva de Bezier de grado d?

Respuesta : d+1

2.¿Por qué, al construír splines, normalmente no se utilizan polinomios de mayor grado, por ejemplo, grado 100?

Respuesta : Aparte de el sobrecosto en cálculos, la curva de un polinomio de mayor grado da más “vueltas” y es menos suave. De hecho, está demostrado que, dado un conjunto de puntos, la curva que los interpola que tiene menor curvatura es una spline de grado 3.