Auxiliar 1 - Lógica proposicional

Cátedra: Matemáticas Discretas
Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Miguel Romero, Francisco Unda

15 de Junio del 2010

1. Muestre que existen Σ y α tal que $\Sigma \not\models \alpha$ y $\Sigma \not\models \neg\alpha$.

2. Sean $\Sigma \subset L(P)$, ϕ, θ, $\alpha \in L(P)$. Pruebe que si $\phi \longrightarrow \alpha$ es tautologia, entonces

$$\Sigma \cup \{\phi, \alpha\} \models \theta \iff \Sigma \cup \{\phi\} \models \theta$$

3. Sea $\Sigma \subset L(P)$, con $|P| = \infty$. Decimos que Σ es finitamente satisfacible si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible. Sea $p \in P$. Muestre que si Σ es finitamente satisfacible entonces $\Sigma \cup \{p\}$ es finitamente satisfacible o $\Sigma \cup \{\neg p\}$ es finitamente satisfacible.

4. Asuma que se cumple que Σ es finitamente satisfacible si y solo si es satisfacible, para cualquier Σ(Esto se puede probar!). Demuestre que para cualquier fórmula α, $\Sigma \models \alpha$ si y solo si existe un subconjunto finito $\Sigma' \subset \Sigma$ tal que $\Sigma' \models \alpha$.

5. Decimos que una fórmula está en CNF si es de la forma

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n_i} l_{ij}.$$

   Además decimos que una fórmula esta en 3-CNF si $n_i = 3$. Pruebe que para toda fórmula α en CNF existe otra fórmula β en 3-CNF tal que α es satisfacible si y sólo si β es satisfacible. Se puede realizar esta transformación en tiempo polinomial?

6. Sea G un grafo. Un conjunto $I \subset V(G)$ se dice independiente, si ningún par de vértices en I está conectado por un arco. Pruebe que para toda fórmula α en $3-CNF$ existe un grafo G tal que α es satisfacible si y sólo si G tiene un conjunto independiente I de tamaño al menos m, donde m es el número de cláusulas de α. Se puede realizar esta transformación en tiempo polinomial?

7. El conectivo lógico binario NOR se define de la siguiente manera: p NOR q es verdadero sólo si ni p ni q lo son. Demuestre que para cada oración proposicional α que utiliza los conectivos $\{\neg, \vee, \wedge\}$ es posible encontrar una oración α^* que solo utiliza el conectivo NOR, y tal que $\alpha \equiv \alpha^*$.