UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 4 - Semestre Otoño 2010

1. Sea G un grafo simple. Demuestre que G o su complemento, $\bar{G}$, es conexo.

   Solución: Asuma que G no es conexo, por tanto tiene al menos dos componentes conexas. Demostraremos que $\bar{G}$ es conexo.

   Considere dos nodos u, v cualquiera en $\bar{G}$. Si u, v pertenecen a distintas componentes conexas en G entonces son adyacentyes en $\bar{G}$. Si pertenecen a la misma componente conexa en G, tome u' nodo cualquiera en otra componente conexa de G. Luego, existen arcos (u, u') y (u', v) en $\bar{G}$. Esto demuestra que cualesquiera dos nodos de $\bar{G}$ están a distancia a lo más 2.

2. Asuma que n es un entero par mayor mayor o igual a 4. Sea G un grafo simple con n vértices y estrictamente más de $\frac{n^2}{4}$ arcos. Demuestre que G contiene un triángulo; esto es, existen 3 vértices a, b, c en G tal que (a, b), (b, c) y (a, c) son arcos de G.

   Solución: Denote por $d(u)$ el grado de un nodo u. Asuma, por contradicción, que $G = (V, E)$ no contiene triángulos.

   Dado que no existen triángulos, para cada arco $(u, v) \in E$ se debe tener que $d(u) + d(v) \leq n$. Sumando los lados de esta desigualdad para cada $(u, v) \in E$ obtenemos que $\sum_{v \in V} d(v)^2 \leq n|E|$.

   Por el teorema de los saludos sabemos que $2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$. Por tanto, $4|E|^2 = (\sum_{v \in V} d(v))^2$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $(\sum_{v \in V} d(v))^2 \leq n \sum_{v \in V} d(v)^2$. Concluimos que

   $$4|E|^2 \leq n \sum_{v \in V} d(v)^2 \leq n^2|E|,$$

   y, por tanto, $|E| \leq n^2/4$, lo que es una contradicción.

3. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple bipartito. Decimos que $E' \subseteq E$ es un *matrimonio* en G, si no existen dos arcos en E' que sean incidentes al mismo nodo, y para todo vértice $v \in V$ existe un arco en E' que es incidente a él.

   Para un nodo v en G, defina $N(v)$ como el conjunto de nodos que son adyacentes a v. Si X es un conjunto de vértices en G, entonces definimos $N(X)$ como $\bigcup_{v \in X} N(v)$.

   Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito simple y conexo cuyo conjunto de nodos puede ser particionado en V_1 y V_2 (es decir, todos los arcos en E van desde V_1 a V_2). Demuestre que G contiene un matrimonio si y solo si $|V_1| = |V_2|$ y para cada $X \subseteq V_1$ se tiene que $|X| \leq |N(X)|$.

   Solución: Es claro que si G contiene matrimonio entonces $|V_1| = |V_2|$ y para cada $X \subseteq V_1$ se tiene que $|X| \leq |N(X)|$. Aquí demostramos la otra dirección.

Sea $v_1, \ldots, v_n$ una enumeración de los nodos de V_1. Iremos construyendo inductivamente, nodo a nodo, un matrimonio para G. Comenzamos con v_1. Dado que $N(v_1) \geq 1$, debe existir al menos un nodo u_1 en V_2 que es adyacente a v_1. El matrimonio empieza asignándole el nodo u_1 a v_1 (pero note que luego esto puede cambiar).

Para el caso inductivo considere el nodo v_{j+1}, $j < n$. Sabemos que v_{j+1} es adyacente a al menos un nodo en V_2. El problema sería que cada nodo u que es adyacente a v_{j+1} ya hubiera sido asignado por el matrimonio a alguno de los nodos $v_1, \ldots, v_j$. (Si esto no ocurriera, simplemente tomamos un nodo u que es adyacente a v_{j+1}, y no ha sido asignado a v_i ($i \leq j$) por el matrimonio, y se lo asignamos a v_{j+1}).

Sea entonces V_1' el conjunto de nodos en $\{v_1, \ldots, v_j\}$ tales que los nodos que le han sido asignados por el matrimonio pertenecen a $N(v_{j+1})$. Tome el conjunto $V_1'' = V_1' \cup \{v_{j+1}\}$. Sabemos que $N(V_1'') \geq V_1''$, y, por tanto, debe existir al menos un nodo u que pertenece a $N(V_1'')$ pero no pertenece a $N(v_{j+1})$. Si este nodo no ha sido asignado por el matrimonio a ningún nodo en $\{v_1, \ldots, v_j\}$ entonces podemos construir un nuevo matrimonio con el siguiente "switching": Sea v_i un nodo en V_1' que es adyacente a u. Entonces el matrimonio le asigna a v_i el nodo u, y a v_{j+1} el nodo que había sido asignado a v_i hasta el paso anterior.

El problema sería que todos los nodos en $N(V_1'')$ hayan sido asignados a los nodos en $\{v_1, \ldots, v_j\}$ por el matrimonio. Sin embargo, no es difícil ver que en ese caso podríamos continuar iterativamente nuestro proceso hasta que "sobreün nodo. En tal caso realizamos el "switching".