UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 3 - Semestre Primavera 2010

1. El conjunto B de los strings de paréntesis *balanceados* se define recursivamente como sigue: (1) El string vacío ϵ está en B; y (2) si $x, y \in B$ entonces (x) y xy pertenecen a B.

   Definimos la función N en el conjunto de strings de paréntesis de la siguiente forma:

$$N(\epsilon) = 0 \; ; \; N(() = 1 \; ; \; N()) = -1$$
$$N(uv) = N(u) + N(v)$$

   Demuestre usando inducción estructural que si un string de paréntesis w satisface que $N(w) = 0$ y $N(u) \geq 0$ para todo *prefijo* u de w, entonces w es balanceado. (Decimos que u es *prefijo* de w si existe string u' tal que $w = uu'$).

   Solución: Esta vez debemos hacer inducción en el conjunto de *todos* los strings de paréntesis que se define recursivamente de la siguiente forma: (1) El string vacío ϵ es un string, y (2) si w es un string entonces $w)$ y $w($ son strings.

   El caso inductivo $w = \epsilon$ es trivial, pues por definición es balanceado. A continuación probamos el caso inductivo.

   Asuma primero que $w = w'($. Suponga, sin pérdida de generalidad, que $N(w) = 0$. Luego, $N(w') = -1$. Por tanto, la propiedad se cumple trivialmente.

   Asuma, por tanto, que $w = w')$, que $N(w) = 0$ y que $N(u) \geq 0$ para todo prefijo u de w. Consideramos dos casos. Primero, asuma que existen strings no vacíos u y v tal que $w = uv$ y $N(u) = 0$. Luego, $N(v) = 0$. Además, es fácil demostrar que todo prefijo de u' de u satisface $N(u') \geq 0$. Lo mismo es cierto para todo prefijo v' de v. Por hipótesis inductiva, u y v son balanceados, por lo que w es balanceado.

   El segundo caso es que no existan strings no vacíos u y v tal que $w = uv$ y $N(u) = 0$. Podemos concluir que el primer símbolo de w es (, y que, por tanto, $w' = (w''$. Además, $N(w'') = 0$, y dado que todo prefijo no vacío z de w' satisface $N(z) > 0$ concluimos qe todo prefijo z' de w'' satisface $N(z') \geq 0$. Luego, por hipótesis inductiva, w'' es balanceado, y dado que $w = (w'')$, concluimos que w también es balanceado.

2. Asuma que los números del 1 al 36 han sido distribuidos en una ruleta (es decir, circularmente). Demuestre que deben existir tres números consecutivos en esta distribución cuya suma es al menos 55.

   Solución: Asumamos por contradicción que no existen tales 3 números consecutivos. Asumamos que el orden circular es $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{36}, x_1$. Luego, para cada $1 \leq i \leq 12$, $x_{3i-2} + x_{3i-1} + x_{3i} < 55$. Por tanto, $\sum_{1 \leq i \leq 36} x_i < 12 \cdot 55 = 660$, lo que es una contradicción pues los primeros 36 números suman 666.

3. En este ejercicio consideramos strings sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$.

- Encuentre una relación de recurrencia de la forma $a_n = c \cdot a_{n-1}$, $n > 1$, donde c es una constante positiva, que defina el número de strings sobre este alfabeto que no contienen dos símbolos iguales consecutivos. Defina las condiciones iniciales y justifique su respuesta.

  Solución: Asuma el string es de largo n. Para el último símbolo tenemos 3 posibilidades (este es a, b o c). Para cada uno de los anteriores tenemos solo dos posibilidades (por ejemplo, si el último símbolo es a, entonces el penúltimo solo puede ser b o c. Por tanto, existen $3 \cdot 2^{n-1}$ strings de largo n, $n \geq 1$, sin símbolos iguales consecutivos. Por tanto, la relación de recurrencia puede definirse como $a_n = 2a_{n-1}$, para $n \geq 2$, donde $a_0 = 1$ y $a_1 = 3$.

- Encuentre una relación de recurrencia de la forma $b_n = c \cdot b_{n-1} + f(n)$, $n > 1$, donde c es una constante positiva, que defina el número de strings sobre este alfabeto que contienen dos símbolos iguales consecutivos. Defina las condiciones iniciales y justifique su respuesta.

  Solución: Sabemos que $a_n + b_n = 3^n$, $n > 1$, y por tanto, $b_n = 3^n - a_n = 3^n - 3 \cdot 2^{n-1}$. Luego, $b_n = 2b_{n-1} + 3^{n-1}$. Las condiciones iniciaples en este caso son $b_0 = 1$ y $b_1 = 3$.