

Auxiliar 6 - Relaciones de recurrencia

Cátedra: Matemáticas Discretas para la Computación

Profesor: Pablo Barceló

Auxiliares: Raimundo Briceño, Francisco Unda

20 de octubre, 2010

1. Considere la relación de recurrencia genérica:

$$\begin{cases} f(n)a_n &= g(n)a_{n-1} + h(n) \\ a_0 &= C \end{cases}$$

- a) Muestre que la relación anterior se puede reducir a una de la forma:

$$\begin{cases} b_n &= b_{n-1} + Q(n)h(n) \\ b_0 &= C \end{cases},$$

donde $b_n = g(n+1)Q(n+1)a_n$ y $Q(n) = \frac{f(1)\cdots f(n-1)}{g(1)\cdots g(n-1)g(n)}$.

- b) Use la parte anterior para encontrar una solución a la relación de recurrencia original.

- c) Ahora, resuelva la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{cases} (n+1)a_n &= (n+3)a_{n-1} + n \\ a_0 &= 1 \end{cases}$$

2. Se puede demostrar que el número de comparaciones promedio que realiza el algoritmo de ordenación *Quicksort* en n elementos satisface la relación:

$$\begin{cases} C_n &= n+1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k \\ C_0 &= 0 \end{cases}$$

- a) Muestre que $\{C_n\}$ satisface la relación de recurrencia:

$$\begin{cases} nC_n &= (n+1)C_{n-1} + 2n \\ C_0 &= 0 \end{cases}$$

- b) Resuelva explícitamente la relación anterior.

3. (*Relaciones lineales a coeficientes constantes*)

a) Encontrar la solución de la relación de recurrencia:

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3},$$

con condiciones iniciales $a_0 = 0, a_1 = -2, a_2 = -1$.

b) Encontrar la solución general de la relación de recurrencia no-homogénea:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n.$$

4. Sea a_n la suma de los primeros n cuadrados perfectos, esto es,

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^2.$$

Muestre que la sucesión $\{a_n\}$ satisface la relación de recurrencia lineal no-homogénea:

$$\begin{cases} a_n &= a_{n-1} + n^2 \\ a_1 &= 1 \end{cases}$$

y resuélvala.