Capítulo 4: Grafos
Clase 4: Árboles

Matemática Discreta - CC3101

Profesor: Pablo Barceló

Árboles

Los árboles son una clase particular de grafos que aparecen muy usualmente en computación:

- Como herramienta para construir algoritmos eficientes;
- para construir códigos eficientes para la transmisión de datos;
- para estudiar juegos;
- como documentos XML;
- entre otros.

Árboles

Definition

Un árbol es un grafo conexo no dirigido que no contiene circuitos simples.

Un bosque es un grafo no dirigido que no contiene circuitos simples.

Árboles

Definition

Un árbol es un grafo conexo no dirigido que no contiene circuitos simples.

Un bosque es un grafo no dirigido que no contiene circuitos simples.

Existen varias formulaciones equivalentes. Por ejemplo,

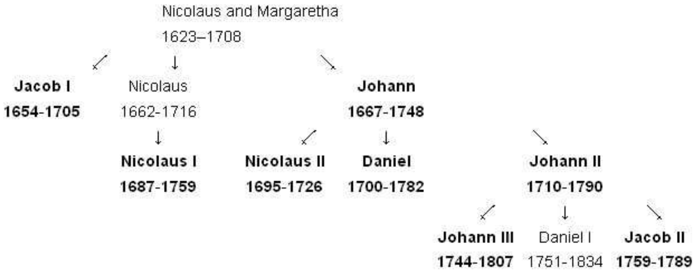
Proposición

Un grafo no dirigido es un árbol si y sólo si hay un único camino simple entre cualquiera dos de sus vértices.

Árboles con raíz

En muchas aplicaciones es necesario distinguir un nodo particular de un árbol, que es designado como la raíz (los definimos recursivamente antes).

Además, asumimos que los arcos pasan a ser dirigidos, siempre alejándose de la raíz. Por ejemplo,



Terminología de grafos

Sea T un grafo con raíz v.

El padre de un nodo u tal que $u \neq v$, es el nodo u' tal que existe un arco dirigido desde u' a u en T. También decimos que u es un hijo de u'.

Dos nodos son hermanos si tienen el mismo padre.

Los ancestros de u son todos los nodos $u' \neq u$ en el camino desde u hasta v. Los descendientes de u son todos los vértices que tienen a u como ancestro.

Una hoja es un nodo sin hijos. Los nodos que no son hojas se llaman internos.

El subárbol de T con raíz es u es el subgrafo de T inducido por u y todos sus descendientes.

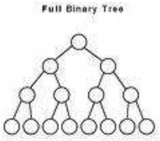
Árboles m-arios

A veces estamos interesados en árboles donde el número de hijos es limitado:

Definition

Un árbol con raíz es m-ario, $m \geq 1$, si cada nodo interno tiene a lo más m hijos. Decimos que el árbol m-ario es completo si cada nodo interno tiene exactamente m hijos.

Por ejemplo, el siguiente es un árbol binario completo:



Propiedades de árboles

Demuestre los siguientes teoremas por inducción:

Teorema

Todo árbol con n vértices tiene $n - 1$ arcos.

La altura de un árbol T con raíz v es el máximo largo de un camino simple desde v a una de las hojas de T.

Teorema

Hay a lo más m^h hojas en un árbol m-ario de altura h.

Ejercicios

Ejercicio: Demuestre que un grafo simple es un árbol si y solo si es conexo, pero sacar cualquiera de sus arcos lo convierte en un grafo no conexo.

Ejercicio: Sea G un grafo simple con n vértices. Demuestre que G es un árbol si y solo si es conexo y tiene $n-1$ arcos.

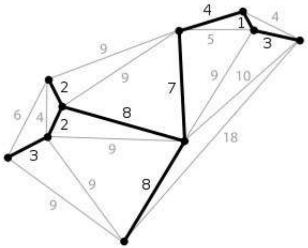
Sea T un árbol y v un nodo del árbol. La excentricidad de v es el largo del mayor camino simple en T que empieza en v. El nodo v es un centro de T si no existe v' con menor excentricidad que v.

Ejercicio: Demuestre que un árbol tiene un centro, o dos que son adyacentes.

Definition

Sea G un grafo simple. Un spanning tree de G es un subgrafo de G que es un árbol y que contiene a todo nodo de$G$.

Por ejemplo, la siguiente figura muestra un grafo junto con uno de sus spanning trees:



Caracterización

Obviamente, si un grafo tiene un spanning tree entonces es conexo. Pero más interesante aún es que lo contrario también es cirto. Esto es,

Teorema

Un grafo simple es conexo si y solo si tiene un spanning tree.

Ejercicio: Demuestre el teorema.

Los spanning trees son útiles en ciertas tareas de los protocolos de Internet.

Asuma que tiene un computador que quiere enviar información a múltiples computadores.

Una solución es enviarle una copia a cada computador, pero esto es ineficiente pues pueden llegar a enviarse demasiadas copias.

Los protocolos de Internet envían esa información a ciertos routers, y estos a otros routers, de tal forma que últimamente todos los computadores reciben el mensaje.

Sin embargo, es ineficiente que un router reciba dos veces el mismo mensaje, i.e. que hayan circuitos en el modelo de grafos de la red.

Los protocolos actuales de Internet resuelven este problema generando un spanning tree de la red.

Ejercicio

El siguiente ejercicio muestra que es posible encontrar una secuencia de spanning trees que lleva de un spanning tree a cualquier otro spanning tree mediante la sucesiva inserción y eliminación de arcos.

Ejercicio: Sean T y T' dos spanning trees del mismo grafo simple G. Asuma que existe arco e en T que no pertenece a T'. Demuestre que existe un arco e' en T' tal que e' no está en T, y tal que T continúa siendo un spanning tree si le sacamos a e y le agregamos a e', y T' continúa siendo un spanning tree si le sacamos a e' y le agregamos a e.