UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 2 - Semestre Primavera 2010

1. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

   a) Defina una relación binaria $\preceq_O$ en $\mathcal{F}$ tal que para cada $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $f_1 \preceq_O f_2$ si y sólo si f_1 es $O(f_2)$. ¿Es $\preceq_O$ un orden parcial en $\mathcal{F}$?

   Solución: No, porque no es una relación antisimétrica. Ejemplo, $f_1 = x$ y $f_2 = x + 1$. Claramente, f_1 es $O(f_2)$ y viceversa, pero $f_1 \neq f_2$.

   b) Defina una relación binaria $\preceq_\Theta$ en $\mathcal{F}$ tal que para cada $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $f_1 \preceq_\Theta f_2$ si y sólo si f_1 es $\Theta(f_2)$. Demuestre que $\preceq_\Theta$ una relación de equivalencia en $\mathcal{F}$.

   Solución: Fácil.

   c) Defina $\mathcal{F}_\Theta$ como el conjunto de las clases de equivalencia de $\mathcal{F}$ con respecto a la relación de equivalencia Θ. Defina la relación $\preceq_{O,\Theta}$ en $\mathcal{F}_\Theta$ de la siguiente forma: Para todo $[f_1], [f_2] \in \mathcal{F}_\Theta$, $[f_1] \preceq_{O,\Theta} [f_2]$ si y sólo si existe $f \in [f_1]$ y $f' \in [f_2]$ tal que f es $O(f')$.
   Demuestre que $\preceq_{O,\Theta}$ es un orden parcial en $\mathcal{F}_\Theta$.

   Solución: Claramente la relación es refleja porque f es $O(f)$.
   Para la antisimetría, asuma $[f_1] \preceq_{O,\Theta} [f_2]$ y $[f_2] \preceq_{O,\Theta} [f_1]$. Luego, existe $g_1, g_2 \in [f_1]$ y $g_3, g_4 \in [f_2]$ tales que g_1 es $O(g_3)$ y g_4 es $O(g_2)$. Pero esto implica que f_1 es $O(f_2)$ y f_2 es $O(f_1)$, pues g_1 y g_2 son $\Theta(f_1)$ y g_3 y g_4 son $\Theta(f_2)$. Concluimos que f_1 es $\Theta(f_2)$, y por tanto $[f_1] = [f_2]$.
   La transitividad es similar.

   d) Demuestre que $\preceq_{O,\Theta}$ no es un orden total en $\mathcal{F}_\Theta$.

   Solución: Esto lo demuestra las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

2. Suponga que entre cada par de ciudades de un país existe un camino de un sentido que las conecta en una dirección o la otra. Demuestre utilizando inducción que existe una ciudad que puede ser alcanzada desde cualquier otra ciudad ya sea de forma directa o pasando por exactamente una ciudad diferente.

   Solución: Por inducción en el número de ciudades. El caso base $n = 1$ es trivial. Asuma para el caso inductivo que hay $n + 1$ ciudades, $n \geq 1$. Sea C el conjunto de ciudades. Remueva una ciudad cualquiera $c \in C$. Luego, entre las restantes n ciudades existe ciudad $c' \in C \setminus \{c\}$ que cumple la propiedad buscada (por hipótesis inductiva).

   Asuma por contradicción que no existe ciudad en C que cumpla la propiedad deseada. Sea N el conjunto de todas las ciudades desde las cuales se puede viajar directamente a c'. Claramente $c \notin N$, y para cada $c'' \in N$ se tiene que se puede viajar directamente desde c'' a c. (Esto es porque de otra forma c' satisfacería la propiedad deseada en C).

Sea N' el conjunto de todos los elementos en $C \setminus \{c\}$ a los cuales se puede viajar directamente desde c'. En este caso, si $N' \neq \emptyset$ entonces existe $n \in N'$ tal que todo lo siguiente es cierto: (1) No se puede viajar directamente desde n a c, y no se puede viajar directamente desde n a ninguna ciudad en N (de otra forma c satisfacería la propiedad deseada en C).

Consideramos dos posibilidades: (1) Si todo elemento en $N' \setminus \{n\}$ tiene camino directo a n, entonces n satisface la propiedad deseada en C lo que es una contradicción. (2) El conjunto $N'' \subseteq N' \setminus \{n\}$ de las ciudades a las cuales se puede viajar directamente desde n es no vacío. Luego, por hipótesis inductiva, el conjunto inducido por las ciudades en N'' tiene centro n'. Demostraremos que n' es centro de C, lo que es una contradicción.

Claramente desde cada ciudad en $C \setminus N$ hay camino que pasa por exactamente una otra ciudad hasta llegar a n' (el camino pasa por n en este caso). Además, desde cada ciudad en N' existe camino que pasa por a lo más una ciudad hasta llegar a n'. Por ejemplo, si la ciudad esta en N'' este camino está dado por el hecho de que n' es centro de N''. Si, por otro lado, la ciudad está en $N' \setminus (N'' \cup \{n\})$ entonces el camino pasa por n.

3. Demuestre que para cada $n \geq 2$, la expansión de $(1 + x + x^2)^n$ contiene al menos un coeficiente par.

   Hint: Concéntrese en la paridad de los 4 primeros coeficientes de la expansión de $(1 + x + x^2)^n$.

   Solución: Asuma que $(1+x+x^2)^n = \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i$, para $n \geq 2$. Luego, $(1+x+x^2)^{n+1} = \sum_{i=0}^{2n+2} b_i x^i$, donde $b_0 = a_0$, $b_1 = (a_0 + a_1)$, $b_2 = (a_0 + a_1 + a_2)$ y $b_3 = (a_1 + a_2 + a_3)$. Esto quiere decir que la paridad de los 4 primeros coeficientes de la expansión de $(1 + x + x^2)^{n+1}$ solo depende de la paridad de los 4 primeros coeficientes de $(1 + x + x^2)^n$.

   Definimos $q_n(x)$ como la expansión de $(1+x+x^2)^n$ con los coeficientes escritos módulo 2. Entonces,

$$
\begin{aligned}
q_1(x) &= 1 + x + x^2 \\
q_2(x) &= 1 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + \ldots \\
q_3(x) &= 1 + 1x + 0x^2 + 1x^3 + \ldots \\
q_4(x) &= 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots \\
q_5(x) &= 1 + 1x + 1x^2 + 0x^3 + \ldots \\
q_6(x) &= 1 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

   Note que los primeros cuatro coeficientes de $q_6(x)$ coinciden con los de $q_2(x)$. Esto quiere decir que la secuencia de los cuatro primeros coeficientes de $q_n(x)$ es periódica, y, en particular, los primeros cuatro coeficientes de $q_{n+4}(x)$ coinciden con los de $q_n(x)$. Dado que para cada $2 \leq i \leq 5$ al menos uno de los primeros cuatro coeficientes de la expansión de $(1 + x + x^2)^i$ es par, lo mismo es cierto para cada subsecuente $i \geq 5$.