UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 3 - Semestre Otoño 2010

1. Recuerde que los números de Fibonacci, $f_0, f_1, f_2, \ldots$, son definidos por las ecuaciones $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para cada $n \geq 2$. Demuestre lo siguiente:

   a) $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$, para cada $n \geq 1$.

   Solución: Por inducción. Los casos base $n = 1, 2$ son triviales.
   Considere el lado izquierdo de la ecuación para $n + 1$. Este puede escribirse como $\sum_{i=1}^{n} f_i + f_{n+1}$. Por hipótesis inductiva esto es igual a $f_{n+2} + f_{n+1} - 1$, lo que por definición de la serie es $f_{n+3} - 1$.

   b) $f_n > (3/2)^{n-1}$, para todo $n \geq 6$.

   Solución: Por inducción. Los casos base $n = 6, 7$ son triviales.
   El caso inductivo, para $n + 1$, consiste en demostrar que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > (3/2)^n$. Por hipótesis inductiva, $f_n + f_{n-1} > (3/2)^{n-2}(1 + 3/2) \geq (3/2)^n$.

2. ¿De cuántas formas se pueden repartir n monedas de un peso entre k niños, si

   a) cada niño debe recibir al menos una moneda?

   Solución: Asumiendo que $k \geq n$, $\binom{k+n-1}{k-n}$.

   b) permitimos que algunos niños no reciban monedas?

   Solución: $\binom{k+n-1}{k}$.

   Fundamente su respuesta.

3. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 25$, si x_1, x_2 y x_3 son enteros no negativos? Fundamente su respuesta.

4. Utilice el principio del palomar para demostrar lo siguiente: Si se eligen 5 puntos cualesquiera en el interior de un cuadrado de lado 2, entonces existen dos de ellos cuya distancia es a lo más $\sqrt{2}$.

   Solución: Dividamos al cuadrado en 4 cuadrados de lado 0.5. Al menos dos de los 5 puntos deben pertenecer al mismo cuadrado de lado 0.5. Pero entonces la distancia entre ellos es a lo más $\sqrt{2}$.