Auxiliar 4 - Inducción, principio del palomar

Cátedra: Matemáticas Discretas para la Computación

Profesor: Pablo Barceló

Auxiliares: Raimundo Briceño, Francisco Unda

29 de septiembre, 2010

1. Mostrar que el conjunto de conectivos lógicos $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo.
2. Considere el conjunto de strings $\mathcal{A}$, sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, definido recursivamente como:

- a) $\varepsilon, 0, 1 \in \mathcal{A}$.
- b) $1uv \in \mathcal{A}$, donde $u, v \in \mathcal{A}$.

Defina recursivamente una función $\#_1 : \mathcal{A} \subseteq \Sigma^* \mapsto \mathbb{N}$, tal que:

$$\#_1(w) = \text{cantidad de 1's en } w$$

y demuestre las siguientes afirmaciones:

- a) $\#_1(w) \leq l(w), \forall w \in \mathcal{A}$.
- b) $\exists n, m \geq 1 : n \cdot \#_1(w) + m \geq l(w)$.

donde l es el largo del string. ¿Cuál es el menor $n \in \mathbb{N}$ que cumple la afirmación b)?

3. Los números de Fibonacci están dados por la recurrencia:

$$\begin{cases} f_0 = 0, f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Demuestre que:

- a) $\forall n, m \geq 0 : f_n f_m + f_{n+1} f_{m+1} = f_{n+m+1}$,
- b) $\forall n \geq 1 : f_0 f_1 + f_1 f_2 + \dots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$.

4. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, si se escogen n naturales consecutivos arbitrarios, entonces el producto de ellos es divisible por $n!$.
5. Mostrar que entre $n + 1$ enteros positivos que no exceden $2n$ debe existir un número que divida a otro.