UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Examen Recuperativo - Semestre Otoño 2010

1. Un número n no primo que satisface la identidad $b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ para cada entero positivo $b < n$ tal que $gcd(b, n) = 1$ se denomina *número de Carmichael*.

   Sea $p_1 p_2 \cdots p_k$ la factorización prima de un entero positivo $n \geq 2$. Asuma que todos los p_j's son distintos y que $p_j - 1$ divide a $n - 1$ ($1 \leq j \leq k$). Demuestre que si n no es primo entonces es un número de Carmichael.

2. La *secuencia de grados* de un grafo simple no dirigido G es la secuencia de los grados de sus nodos en orden no creciente.

   Asuma que $d_1, d_2, \ldots, d_n$ es la secuencia de los grados de un grafo simple no dirigido. Demuestre que existe un grafo simple G con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ que satisface lo siguiente:

   - Para cada vértice v_i, $i \in [1, n]$, el grado de v_i en G es d_i; y
   - v_1 es adyacente a $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$.

3. El conjunto B de los strings de paréntesis *balanceados* se define recursivamente como sigue: (1) El string vacío ϵ está en B; y (2) si $x, y \in B$ entonces (x) y xy pertenecen a B.

   Definimos la función N en el conjunto de strings de paréntesis de la siguiente forma:

   $$N(\epsilon) = 0 \;;\; N(() = 1 \;;\; N()) = -1$$
   $$N(uv) = N(u) + N(v)$$

   a) Demuestre usando inducción estructural que si un string de paréntesis w es balanceado, entonces $N(w) = 0$ y $N(u) \geq 0$ para todo *prefijo* u de w, i.e. para todo u tal que $w = uu'$.

   b) Demuestre usando inducción estructural que si un string de paréntesis w satisface que $N(w) = 0$ y $N(u) \geq 0$ para todo *prefijo* u de w, entonces w es balanceado.