

Auxiliar 3 - Relaciones, Funciones y Crecimiento

Cátedra: Matemáticas Discretas

Profesor: Pablo Barceló

Auxiliares: Raimundo Briceño, Francisco Unda

8 de Septiembre del 2010

1. Pruebe que la relación dividir a, notada $|$, es un orden parcial y que la relación igualdad módulo p, notada $=_p$ es de equivalencia.
2. Decimos que una relación R en A es cuasi-orden si es refleja y transitiva. Demuestre que:
 - (a) Si R es cuasi-orden en A , entonces $R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia.
 - (b) Si S es una relación en el conjunto de clases de equivalencia de $R \cap R^{-1}$ tal que $(C, D) \in S$ ssi $\exists c \in C$ y $d \in D$ tal que $(c, d) \in R$, entonces S es un orden parcial.
3. Sea R es una relación en A . Demuestre que si R es simétrica y transitiva, y además $\forall a \in A, \exists b \in A$ tal que $(a, b) \in R$ entonces es refleja. Además pruebe que si R es una relación simétrica en A , y definimos para cada $a \in A$: $N(a) = \{b \in A | (a, b) \in R\}$, se tiene que $\forall a, b \in A, a \in N(b) \Leftrightarrow b \in N(a)$.
4. Sean f y g funciones. Probar que
 - (a) Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ lo es.
 - (b) Si f y g son sobreyectivas, entonces $f \circ g$ lo es.
 - (c) Si $f \circ g$ es inyectiva, entonces g lo es.
5. Sea ahora R una relación en $A \times B$, y $D(A) = \{(a, a) | a \in A\}$. Verificar las siguientes propiedades:
 - (a) R es función ssi $R^{-1}R \subset D(B)$ y para cada elemento de A , $\exists b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.
 - (b) Si R es función, es inyectiva ssi $RR^{-1} \subset D(A)$.
 - (c) R es transitiva ssi $\forall n, R^n \subset R$
 - (d) Si R tiene n elementos, entonces $R^* = \bigcup_{i \leq n} R^i$
6. Crecimiento de funciones: Definiciones
 - (a) Sean f y g dos funciones definidas de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Decimos que f es $O(g)$ si existen constantes c y k tal que $\forall x > k, f(x) \leq cg(x)$.
 - (b) Decimos que $f \in \Omega(g)$ ssi $g \in O(f)$.
 - (c) Decimos que $f \in \Theta(g)$ ssi $f \in O(g)$ y $g \in O(f)$.
 - (d) Decimos que $f \in o(g)$ ssi $f \notin \Omega(g)$.
 - (e) Decimos que $f \in w(g)$ ssi $f \notin O(g)$.

7. Mostrar que todo polinomio de grado n es $O(x^n)$, y más aún ningún polinomio de grado n es $O(x^{n-1})$.
8. Sea F el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demuestre que Θ es una relación de equivalencia en F . Si ahora F_Θ es el conjunto de las clases de equivalencia inducidos por Θ , definiendo $[f]_\Theta \in O([g]_\Theta)$ cuando $f \in O(g)$, mostrar que O es un orden parcial en F_Θ . Mostrar que este no es un orden total, ni un buen orden. Como se puede restringir F_Θ para que sí lo sea?