Auxiliar 2 - Lógica de predicados

Cátedra: Matemáticas Discretas para la Computación
Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Raimundo Briceño, Francisco Unda

25 de agosto, 2010

1. Asuma que el dominio de discurso son los números naturales y que contamos con:

   - un predicado binario $<$ que es intepretado como el orden lineal estándar en $\mathbb{N}$,
   - dos predicados ternarios $\cdot$ y $+$ que definen a la multiplicación y suma en $\mathbb{N}$, respectivamente.

   Exprese en lógica de primer orden las siguientes propiedades de los números naturales usando sólo los predicados mencionados en el párrafo anterior:

   a) Todo número natural es par o impar, pero no ambos.
   b) El sucesor de todo número par es impar.
   c) Existe un número infinito de números primos.
   d) Para todo par (n, n') de números naturales positivos, existe un único par (p, c) tal que $p \geq 0$, $0 \leq c \leq n-1$ y $n' = pn + c$.

2. Sea $E(x, y)$ un predicado binario utilizado para representar la noción de adyacencia en grafos. En cada una de las siguientes preguntas escriba una oración de la lógica de primer orden que represente la propiedad mencionada.

   a) El grafo es un clique.
   b) El grafo contiene un clique con 4 nodos.
   c) El grafo tiene un ciclo con 4 nodos.
   d) Existen elementos en el grafo cuya distancia es 4.
   e) La distancia máxima entre dos nodos del grafo es 3.
   f) El grafo contiene exactamente 6 nodos.

3. Construya las oraciones que se indican a continuación:

   a) Dé una oración ϕ_n que sea satisfecha cuando el dominio del discurso tenga al menos n elementos.

   b) Dé una oración ψ_n que sea satisfecha cuando el dominio del discurso tenga exactamente n elementos.

4. Sea $x \subseteq y$ un predicado binario. Intuitivamente $\subseteq$ representa la relación de subconjunto; es decir, $x \subseteq y$ representa que x es un subconjunto de y. Exprese en lógica de primer orden las siguientes propiedades del predicado $x \subseteq y$:

   a) La relación $x \subseteq y$ es un orden parcial; i.e., es refleja, antisimétrica y transitiva.

   b) Existe un único elemento $\perp$ que está contenido en cualquier otro conjunto (i.e. el conjunto vacío).

   c) Existe un único conjunto $\top$ que contiene a todo otro conjunto (es decir, el conjunto universo).

   d) La unión de dos conjuntos siempre existe y además es única (notar que $x \cup y = z$ si y sólo si z es el "menor" conjunto con respecto al orden parcial $\subseteq$ que contiene tanto a x como a y).

   e) La intersección de dos conjuntos siempre existe y además es única (notar que $x \cap y = z$ si y sólo si z es el "mayor" conjunto con respecto al orden parcial $\subseteq$ que está contenido tanto en x como en y).

   f) Todo conjunto tiene un complemento; i.e., para todo conjunto x existe un conjunto $\overline{x}$ tal que $x \cap \overline{x} = \perp$ y $x \cup \overline{x} = \top$.

5. Un cuasigrupo se define como aquellas estructuras $\mathcal{A} = (A, R)$ que satisfacen los siguientes axiomas:

   a) $\forall x \forall y \exists z R(x, y, z)$

   b) $\forall x \forall y \forall z_1 \forall z_2 \, (R(x, y, z_1) \wedge R(x, y, z_2)) \to z_1 = z_2$

   c) $\forall x \forall y \exists! z_l \exists! z_r \, (R(z_l, x, y) \wedge R(x, z_r, y))$

   Suponga que se tiene un cuasigrupo que además satisface el axioma de asociatividad:

   $$\forall x \forall y \forall z \exists a \exists b \exists c (R(x, y, a) \wedge R(y, z, b) \wedge R(x, b, c)) \to R(x, b, c)$$

   Demuestre que todo cuasigrupo asociativo satisface los axiomas de grupo.