



## Auxiliar #6

Viernes 27 de Mayo de 2010

### 6. ANÁLISIS DE ESFUERZOS INDUCIDOS EN TORNO A EXCAVACIONES

El comportamiento de la roca es complejo, pero se puede realizar una primera aproximación considerando la roca: **continua, homogénea, isótropa y elástica**.

Las soluciones analíticas deben satisfacer ciertas condiciones para la distribución de esfuerzos:

- Condiciones de borde del problema
- Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- Ecuaciones constitutivas del material
- Ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones

A partir de las últimas tres condiciones es posible establecer que en un análisis plano de esfuerzos, se cumple:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$$

Existen una solución analítica para determinar los esfuerzos inducidos en torno a excavaciones circulares y elípticas (técnicas más complicadas basadas en análisis de variables complejas extienden los resultados a otros casos).

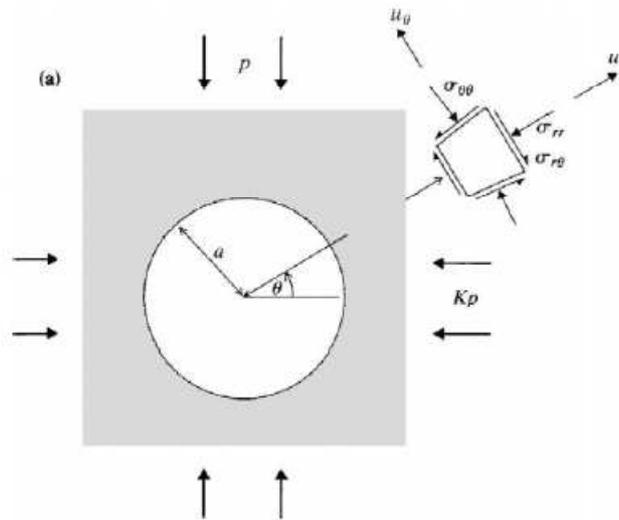
#### 6.1. ANÁLISIS DE ESFUERZOS INDUCIDOS EN TORNO A EXCAVACIONES CIRCULARES

Para una excavación circular se determinan las ecuaciones que definen los esfuerzos y los desplazamientos (Kirsch, 1898)

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{p}{2} \left[ (1+K) \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - (1-K) \left( 1 - 4\frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{p}{2} \left[ (1+K) \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + (1-K) \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{p}{2} \left[ (1-K) \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right]\end{aligned}$$

$$u_r = -\frac{pa^2}{4Gr} \left[ (1+K) - (1-K) \left\{ 4(1-\nu) - \frac{a^2}{r^2} \right\} \cos 2\theta \right]$$

$$u_\theta = -\frac{pa^2}{4Gr} \left[ (1-K) \left\{ 2(1-2\nu) + \frac{a^2}{r^2} \right\} \sin 2\theta \right]$$



**Ilustración 1. Sistema de coordenadas y nomenclatura para la distribución de esfuerzos y de deformaciones en una excavación circular**

Casos de interesantes:

- En la superficie de la excavación ( $r=a$ )  
Techo y paredes
- Esfuerzo horizontal de campo lejano ( $\theta=0, r \rightarrow \infty$ )

## 6.2. ANÁLISIS DE ESFUERZOS INDUCIDOS EN TORNO A EXCAVACIONES ELÍPTICAS

Se definen algunos parámetros geométricos de la elipse:

$$e_0 = \frac{(W+H)}{(W-H)}$$

$$b = \frac{4(x_1^2 + z_1^2)}{(W^2 - H^2)}$$

$$d = \frac{8(x_1^2 - z_1^2)}{(W^2 - H^2)} - 1$$

$$u = b + \frac{e_0}{|e_0|} (b^2 - d)^{1/2}$$

$$e = u + \frac{e_0}{|e_0|} (u^2 - 1)^{1/2}$$

$$\psi = \arctan \left[ \left( \frac{e+1}{e-1} \right) \frac{z_1}{x_1} \right]$$

$$\theta = \arctan \left[ \left( \frac{e+1}{e-1} \right)^2 \frac{z_1}{x_1} \right]$$

$$C = 1 - ee_0$$

$$J = 1 + e^2 - 2e \cos 2\psi$$

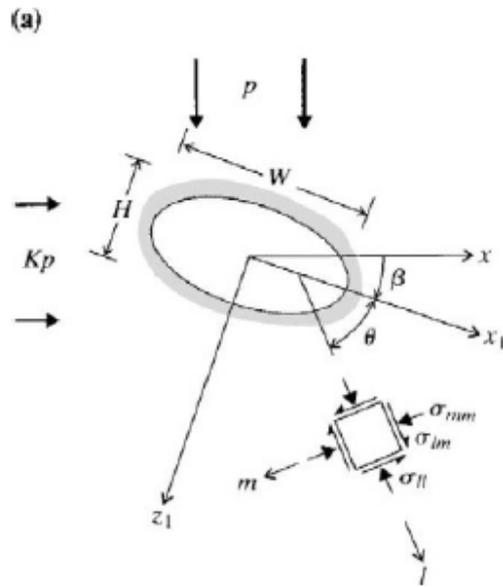


Ilustración 2. Sistema de coordenadas y nomenclatura para la distribución de esfuerzos y de deformaciones en una excavación elíptica

Los componentes del esfuerzo están dados por:

$$\begin{aligned} \sigma_{II} &= \frac{p(e_0 - e)}{J^2} \left\{ (1 + K)(e^2 - 1) \frac{C}{2e_0} \right. \\ &\quad \left. + (1 - K) \left[ \left[ \frac{J}{2}(e - e_0) + Ce \right] \cos 2(\psi + \beta) - C \cos 2\beta \right] \right\} \\ \sigma_{III} &= \frac{p}{J} \{ (1 + K)(e^2 - 1) + 2(1 - K)e_0 [e \cos 2(\psi + \beta) - \cos 2\beta] \} - \sigma_{II} \\ \sigma_{Im} &= \frac{p(e_0 - e)}{J^2} \left\{ (1 + K) \frac{Ce}{e_0} \sin 2\psi + (1 - K) \left[ e(e_0 + e) \sin 2\beta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e \sin 2(\psi - \beta) - \left[ \frac{J}{2}(e_0 + e) + e^2 e_0 \right] \sin 2(\psi + \beta) \right] \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

Caso interesante:

- a) Esfuerzos en el borde de la excavación (se eligen  $x_1, z_1$  tales que estén en el borde, con eso  $e=e_0, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$ )

Con lo anterior el esfuerzo en el borde viene dado por :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{p}{2q} \{ (1 + K)[(1 + q^2) + (1 - q^2) \cos 2(\psi - \beta)] \\ &\quad - (1 - K)[(1 + q^2) \cos 2\psi + (1 - q^2) \cos 2\beta] \} \end{aligned}$$

- b) Esfuerzos en el borde de la excavación con los ejes de la elipse orientados en el sentido de los esfuerzos ( $\beta=0$ )  
Esfuerzos en el techo y en las paredes

### 6.3. PROBLEMAS

P1- Un túnel de sección circular está ubicado a 1000 metros de profundidad . Los planos de esfuerzos principales son el eje vertical y horizontal. El esfuerzo vertical  $p_v$ , es igual al esfuerzo debido a la profundidad, mientras que el horizontal se define como  $0.28p_v$ . La roca tiene densidad  $2.7 \text{ [t/m}^3\text{]}$ . La resistencia a la compresión es de  $70 \text{ [Mpa]}$  y resistencia a la tracción es de  $2 \text{ [Mpa]}$

- Predecir la respuesta de la excavación dadas las condiciones mencionadas
- Proponer una alternativa de diseño

P2- En el desarrollo de un nivel de transporte de una mina, se construye una galería de sección  $4 \text{ [m]} \times 4 \text{ [m]}$ , paralelo a uno ya existente. El campo principal de esfuerzos es horizontal  $0.5 p_v$  y vertical  $p_v$ . Proponga una mínima distancia a modo de que durante la construcción el nivel no existan problemas de inestabilidad o de soporte.

P3- Se tiene un cuerpo mineralizado estratiforme a una profundidad de  $400 \text{ [m]}$  de la superficie. De análisis geotécnicos, se tienen los siguientes datos:

GSI	53
UCS[Mpa]	120
Resistencia a la traccion[Mpa]	5
$m_i$	20
Densidad roca[t/m <sup>3</sup> ]	2.5
Densidad Especifica Roca[KN/m <sup>3</sup> ]	25
Profundidad[m]	400
$k$ [Chile]	2

La explotación se hará por Room & Pillar y para el dimensionamiento de los pilares se asume que la resistencia del Pilar está dada por la formula de Obert y Duvall:

$$S_p = S'_s \left( 0.78 + 0.22 \frac{W}{H} \right)$$

La resistencia del pilar cúbico ( $S'_s$ ) se obtendrá por Hoek & Brown.

Calcule el ancho del pilar considerando las restricciones de  $W_o$  (falla por tracción) y Factor de Seguridad para pilares permanentes ( $FS > 1,6$ ) de tal forma de maximizar la recuperación.