Casos de difusión pura:

Medio estacionario con concentraciones superficiales específicas:

Estos problemas son análogos a los de conducción de calor (o de flujo viscoso).

La velocidad media, molar o de masa, es cero, y el flujo absoluto de una especie es igual al flujo difusivo.

$$n_A = -\rho D_{AB} \nabla m_A = -D_{AB} \nabla \rho_A$$

$$N_A = -C D_{AB} \nabla x_A = -D_{AB} \nabla C_A$$

Para una aplicación más ajustada a la realidad, estas condiciones se dan cuando la fracción másica del componente que difunde es muy pequeña ($m_A \leq 1,\ x_A \leq 1$) y el flujo del otro componente es, por lo tanto, aproximadamente nulo. Ambas condiciones se dan en soluciones muy diluidas.

La ecuación de Conservación de la masa en medio plano estacionario con gradiente de concentración en una dirección, en forma molar, se escribe:

$$\frac{d}{dx}\left(C D_{AB} \frac{dx_A}{dx}\right) = 0$$

Con $x = 0, x_A = x_{A1}$

$x = L, x_A = x_{A2}$

$$x_A(x) = (x_{A2} - x_{A1}) \frac{x}{L} + x_{A1}$$

De donde:

$$N_{Ax} = -C D_{AB} \frac{(x_{A2} - x_{A1})}{L}$$

Esta solución es análoga a la de conducción de calor a través de una placa plana.

Igualmente hay analogías entre la transferencia radial de calor y de masa a través de cilindros y esferas. Con radios internos y externos r1 y r2. Por ejemplo, para cilindro:

$$x_A(r) = \frac{(x_{Ar1} - x_{Ar2})}{\ln(r_1 / r_2)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + x_{Ar2}$$

Otros casos de Transferencia de masa por difusión.

Hay casos en que la transferencia de masa presenta mayor complejidad que la de transferencia de calor

Consideremos una mezcla binaria de gas. Un tubo vertical abierto en el extremo superior, contiene en el fondo una cierta cantidad de especie A líquida.

El sistema está a presión y temperatura constantes.

Sobre el líquido hay vapores de A, cuya concentración corresponde a la condición saturada, justo en la interfase.

Sea x =0 la coordenada de la interfase y x = L, la de la posición a la salida del tubo.

Xao>XaL, por lo tanto hay una evaporación de A desde la fase líquida, y el vapor de A se mueve hacia arriba por difusión.

Por el tope del tubo circula una mezcla binaria de A y B, con concentraciones constantes de ambas especies. (A y B pueden ser agua y aire, respectivamente).

Como solo hay dos componentes, a lo largo de la columna se mantiene la relación:

$$x_A + x_B = 1$$

Como suponemos que

$$x_{Ao} > x_{AL} \Rightarrow \quad x_{BL} > x_{Bo}$$

Luego la especie B se difunde desde el tope de la columna hacia la fase líquida.

Suponemos además que B no es soluble en A líquido, luego habrá estado estacionario solo si la difusión de B hacia abajo está balanceada por un transporte volumétrico de B hacia arriba.

Este transporte balancea el flujo de difusión de modo que el flujo absoluto de B, $N_B=0$

Sin embargo, ya no tenemos un medio en reposo como en los casos anteriores.

A expresar la ley de Fick en términos del flujo absoluto de A, mostramos que el flujo absoluto de una especie A se podía escribir, en general:

$$\overline{n_A} = -\rho D_{AB} \nabla m_A + m_A (n_A + n_B)$$

Lo que en términos molares es:

$$N_{A,x} = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dx} + x_A (N_{A,x} + N_{B,x})$$

y en este caso:

$$N_{A,x} = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dx} + x_A N_{A,x} \Rightarrow N_{A,x} = -\frac{CD_{AB}}{(1-x_A)} \frac{dx_A}{dx}$$

Ahora vemos que las condiciones de borde de concentración de A son constantes y no hay adición o sustracción de A por reacción química. Por lo tanto, el flujo absoluto de A debe ser independiente de la posición x.

$$\frac{dN_{A,x}}{dx} = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{CD_{AB}}{(1-x_A)} \frac{dx_A}{dx}$$

$$-\ln(1-x_A) = C_1 x + C_2$$

Al aplicar las condiciones:

$$x_A(0) = x_{Ao,} \qquad x_A(L) = x_{AL}$$

Se evalúan las constantes y

$$\frac{1-x_A}{1-x_{A.o}} = \left(\frac{1-x_{A,L}}{1-x_{A,o}}\right)^{x/L}$$

Finalmente, el flujo de evaporación de A resulta:

$$\overline{N}_{A,x} = \frac{CD_{AB}}{L}\ln\left(\frac{1-x_{A,L}}{1-x_{A,o}}\right)$$

Evaluar este flujo con los siguientes datos:

Tubo de 0,2 m de diámetro y altura sobre el agua: 80 mm. En el exterior tenemos aire ambiente a 27ºC y 25% de humedad relativa. El agua en el recipiente también está a 27ºC. Determinar la rapidez de evaporación.

PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN Y DIFUSIÓN EN RÉGIMEN PERMANENTE EN UNA DIMENSIÓN.

En el curso estudiaremos varios problemas específicos con distintas metodologías.

Comenzaremos el estudio de problemas específicos con un caso en que se puede obtener la solución por métodos analíticos.

Es decir, se pedirá obtener una solución analítica y calcularla mediante algún software de programación (por ejemplo Matlab). Finalmente, validar la implementación de la solución mediante comparación con datos de los libros.

Para este tipo de problemas usaremos un caso en que hay transferencia de calor solamente, y en que la forma de la transferencia de calor es conducción pura.

Estudiaremos un problema que pasa prácticamente ignorado en textos de transferencia de calor, y que es:

Aletas de enfriamiento de sección variable.

Las aletas de enfriamiento son extensiones de una superficie que aumentan el intercambio de calor entre ésta y un medio fluido que la rodea.

No es necesario repetir aquí el análisis elemental de una aleta de enfriamiento. Este se basa en los siguientes supuestos:

Se supone transferencia de calor unidimensional en una aleta de perímetro y sección transversal invariable con x, la coordenada a lo largo de la aleta. El coeficiente convectivo alrededor de ésta es uniforme y conocido, y la temperatura del medio externo uniforme.

El parámetro mas importante en la teoría elemental de aletas es el “mL”, que es una medida de la importancia relativa de la conducción y de la convección en el perfil axial de temperatura de la aleta, siendo L el largo de ésta.

La ecuación del calor, para una aleta de sección constante es:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2(T - T_\infty) = 0 \qquad (1)$$

$$\text{Con } m = (hp/kA)^{1/2}$$

Con mL alto, domina la convección, con mL bajo domina la conducción.

Como se sabe la solución de la ecuación (1) es:

$$(T - T_\infty) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Problema análogo de transferencia de masa:

Estas mismas ecuaciones aparecen en la difusión de especies con reacción química.

Consideremos un medio estacionario, unidimensional, con transferencia de masa en dirección x, con concentración total y difusividad constantes,

Reduciendo la ecuación general:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\upsilon \bullet \nabla c_A) = D_{AB}\nabla^2 c_A + R_A$$

Considerando medio estacionario, régimen permanente, y 1D, nos queda

$$D_{AB}\frac{d^2 C_A}{dx^2} + R_A = 0$$

Las reacciones pueden ser de orden cero (en que la tasa temporal de producción de la especia es constante), o de primer orden, en que R_A es proporcional a la concentración local de A

$$R_A = k_1 C_A$$

Pensemos además en una reacción en que A es reactante (es decir, desaparece al proceder la reacción. En ese caso, tenemos:

$$D_{AB}\frac{d^2 C_A}{dx^2} - k_1 C_A = 0$$

Que es análoga a la de la aleta y que tiene su misma solución general.

$$C_A(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Donde $m = (k_1 / D_{AB})^{1/2}$

Cuando la sección transversal de la aleta es variable, se obtiene una ecuación diferencial con coeficientes variables, que es una forma de la ecuación de Bessel, para la cual las soluciones son series de potencias.

En el caso de sección variable con la coordenada x, la ecuación de la aleta es:

$$\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right)-hp(T-T_{\infty})=0 \qquad (2)$$

Como $A=A(x)\wedge p=p(x)$, la ecuación es lineal pero de coeficientes variables.

Hay diversas formas de aletas que responden a esta descripción, tales como:

Aletas de perfil triangular, con base rectangular
Aletas de perfil triangular, con base circular
Aletas circulares en tubos.

Cada caso presenta diferentes dependencias del área y el perímetro con respecto a la coordenada, por lo cual se obtienen soluciones distintas en todos ellos.

Método de series de potencias:

Tomemos una ecuación similar a la de la aleta, con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

Suponemos que tiene una solución expresable como serie de potencias:

$$y(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

Al reemplazar esta serie en la ecuación diferencial, resulta otra serie, cuya suma es nula.

Los coeficientes de todas las potencias de x en la serie resultante deben ser cero para satisfacer la ecuación $\forall x$.

Los coeficientes de esa serie se relacionan de la siguiente manera:

$$a_2=-\frac{1}{2}a_o \qquad a_3=-\frac{1}{6}a_1 \qquad a_4=-\frac{1}{12}a_2=\frac{1}{24}a_o \qquad a_5=-\frac{1}{20}a_3=\frac{1}{120}a_1\ldots..$$

Podemos expresar todos los coeficientes en términos de $a_o\, y\, a_1$ obteniendo las dos series siguientes:

$$y(x) = a_o \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = a_o \cos x + a_1 \sin x$$

Consideremos ahora una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables (funciones de x), la ecuación de Bessel:

$$x \frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx} \right) + (m^2 x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad (3)$$

Usando el mismo procedimiento anterior (aunque con mayor complicación algebraica), obtenemos la solución:

$$y(x) = a_o J_\nu(mx) + a_1 Y_\nu(mx) \qquad (4)$$

Con $J_\nu(mx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(mx/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$ $\qquad$ $J_{-\nu}(mx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(mx/2)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(k-\nu+1)}$

Y... $Y_\nu(mx) = \frac{(\cos \nu\pi) J_\nu(mx) - J_\nu(mx)}{\sin \nu\pi}$

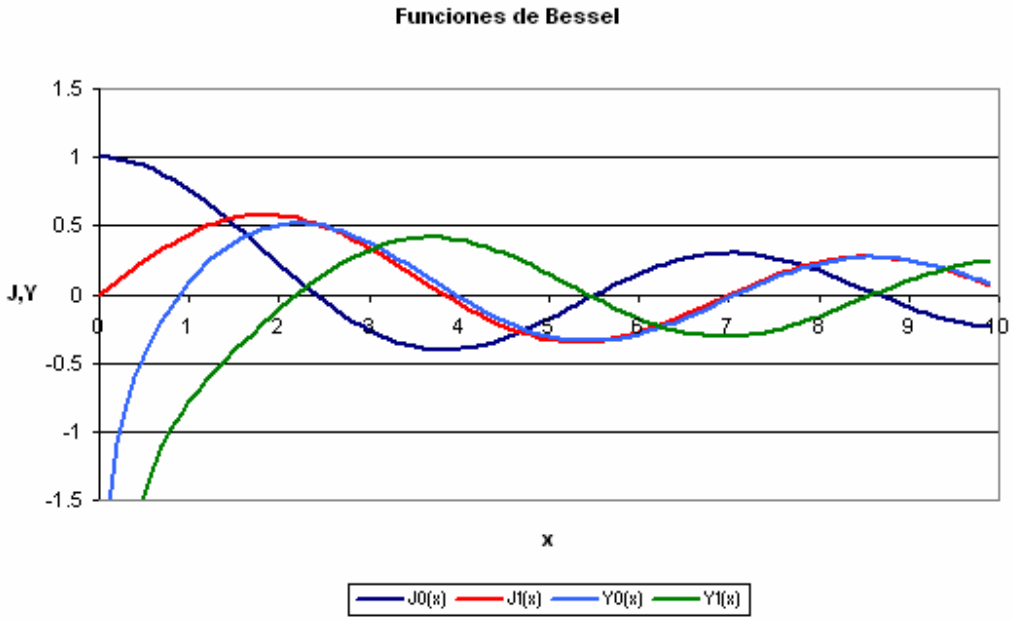
En el denominador aparece la función Gama, que para enteros es:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \qquad \Gamma(1) = 0! = 1$$

Y para no enteros es:

$$\Gamma(\nu)\Gamma(\nu-1) = \pi / \sin \pi\nu, \qquad \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$$

J e Y son las funciones de Bessel de orden ν de primera y de segunda clase, respectivamente.



Pero, observando el signo del segundo término en la ecuación (2), la ecuación que realmente nos sirve es la ecuación de Bessel modificada:

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)-(m^2x^2+\nu^2)y=0 \qquad (5)$$

Cuya solución es: $y(x)=a_oI_\nu(mx)+a_1K_\nu(mx)$

Con: $$I_\nu(mx)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(mx/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$K_\nu(mx)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(mx)-I_\nu(mx)}{\sin\nu\pi}$$

I y K son las funciones de Bessel modificadas de orden ν de primera y de segunda clase, respectivamente.

El software Fortran tiene funciones para calcular las funciones J e Y, en cambio matlab posee capacidad para calcular todas las funciones de bessel.

Adaptación de la ecuación de Bessel modificada para problemas de aletas de sección variable

La solución de la siguiente ecuación

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+b^2x^2y=0 \qquad (6)$$

(que se parece más a la de la aleta) puede representarse por funciones de Bessel.

Para demostrarlo haremos un cambio de variable dependiente: Sea $y=x^{\nu}z$. Si esto se reemplaza en (6), se reordena la ecuación resultante y se ajusta ν de modo que $a+2\nu=1$, se obtiene la ecuación:

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dz}{dx}\right)+(b^2x^2-\nu^2)z=0$$

Que es idéntica a (5). Sus soluciones son funciones de Bessel modificadas con argumento *bx*, por lo tanto:

$$y(x)=x^{\nu}Z_{\nu}(bx), \qquad \nu=(1-a)/2$$

En que Z_{ν} representa una función de Bessel genérica. Finalmente consideramos la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\frac{dy}{dx}\right)+\gamma^2x^{\beta}y=0 \qquad (7)$$

Que es la forma a que llega la ecuación de aleta de sección variable (2) para diversas geometrías con distintas formas de variación del área de conducción y del perímetro de convección con la distancia a lo largo de la aleta (x).

Haciendo ahora un cambio de variable independiente, se puede demostrar que la solución de (7) es:

$$y(x)=x^{\nu/\mu}Z_{\nu}(|\gamma|\mu x^{1/\mu}), \quad \nu=(1-\alpha)/(\beta-\alpha+2), \quad \mu=2/(\beta-\alpha+2), \quad \nu/\mu=(1-\alpha)/2$$

Si γ es imaginario, las soluciones particulares son I y K y el argumento es el indicado en la ecuación precedente, (que incluye el módulo (valor absoluto) de γ).

Tarea Nº 1 propuesta:

Aterricemos el problema con tres casos prácticos:

Aletas de perfil triangular, con base rectangular
Aletas de perfil triangular, con base circular
Aletas transversales alrededor de tubos circulares.

Se pide:

-Elegir una geometría
-Obtener la solución analítica para la distribución de temperatura y el calor disipado.
-Generar un archivo matlab para determinar la distribución de temperatura, el flujo de calor y visualizar la distribución de temperatura en escala de colores en la geometría considerada.
-Suponiendo algunos valores del coeficiente convectivo externo, determinar los rangos viables de dimensiones para cada tipo de aletas, considerando el criterio de eficiencia.
-Generar curvas de eficiencia de la forma de aleta considerada.

Grupos de a 2 personas (no importa que repitan en problema, ya que nunca podrán entregar soluciones iguales)
Tiempo: 2 semanas.