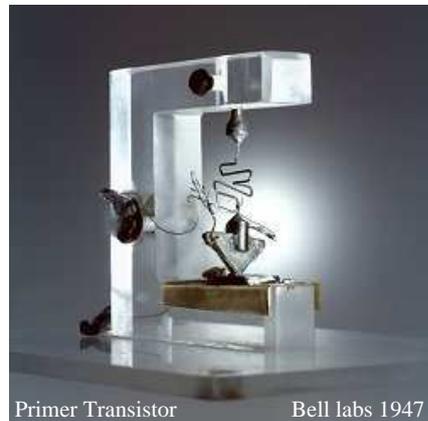


ME55A
Fundamentos de Control de Sistemas



R. H. Hernández Pellicer
Depto. Ing. Mecánica *f* Universidad de Chile

Índice general

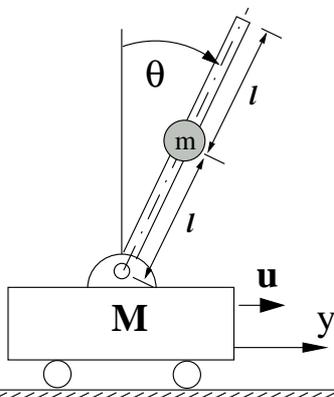
1. Introducción	7
1.1. Reseña histórica	8
1.2. Algunas definiciones	10
1.3. Diagramas de bloque	14
2. Métodos y Técnicas de Tratamiento de Señales	17
2.1. Distribuciones	17
2.1.1. Definición	18
2.1.2. Función δ de Dirac	19
2.1.3. Propiedades de la Función de Dirac	20
2.1.4. Peine de Dirac	22
2.2. Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo	25
2.2.1. Definición	25
2.2.2. Respuesta Impulsional	26
2.2.3. Funciones propias	26
2.3. Función de Transferencia	27
2.3.1. Definición	27
2.3.2. Medición de la Función de Transferencia	27
2.4. Sistemas Muestreados (Discretos)	32
2.4.1. Muestreo de señales	33
2.4.2. Definición de sistemas muestreados	33
2.4.3. Respuesta Impulsional	33
2.4.4. Ecuación de Diferencias	34
2.5. Transformación de Señales	36
2.5.1. Transformada de Fourier	36
2.5.2. Transformada de Laplace	52
2.6. Transformación de Señales a Tiempo Discreto	59

2.6.1.	La Transformada en Z (TZ)	59
2.6.2.	Transformada en frecuencias Reducidas, (TR)	60
2.6.3.	Algunos ejemplos	62
2.6.4.	Problemas Propuestos	64
3.	Modelos y Respuesta Dinámica	69
3.1.	Sistemas Dinámicos	69
3.1.1.	Mecánicos	70
3.1.2.	Eléctricos	73
3.1.3.	Electromecánicos	76
3.1.4.	Fluidos	79
3.2.	Linealización	80
3.2.1.	Formulas generales	81
3.2.2.	Expansión en Serie de Taylor	82
3.3.	Respuesta Dinámica	83
3.3.1.	Regla de Mason	83
3.3.2.	Respuesta Transiente	85
3.3.3.	Respuesta en Sistemas de Segundo Orden	88
3.3.4.	Sistemas de Segundo Orden	91
3.3.5.	Especificación en el Dominio Temporal	93
3.3.6.	Efecto de Ceros y Polos Adicionales	97
3.3.7.	Expansión en Fracciones Parciales	99
4.	Principios Básicos de Retro-Alimentación	101
4.1.	Caso de Estudio: Motor DC	103
4.2.	Propiedades Generales de la Retro-Alimentación	109
4.3.	Tipos de Retro-Alimentación	111
4.3.1.	RA Proporcional (P)	111
4.3.2.	RA Integral (I)	113
4.3.3.	RA Derivativa (D)	113
4.3.4.	Retro-alimentación PID	114
4.3.5.	Ajuste de un controlador PID	116
4.4.	Estabilidad	119
4.4.1.	Estabilidad BIBO	119
4.4.2.	Criterio de estabilidad de Routh	120

5. Métodos de Diseño	125
5.1. Lugar geométrico de Las Raíces (LGR)	125
5.1.1. Midamos la fase de $G(s)$	129
5.1.2. Selección de Ganancia con LGR	137
5.1.3. Compensación dinámica	139
5.2. Respuesta en Frecuencia	145
5.2.1. Régimen estacionario	147
5.2.2. Gráficos de Bode	148
5.2.3. Especificaciones de diseño	154
5.2.4. Estabilidad: Margen de Ganancia y Fase	155
5.3. Estabilidad	158
5.3.1. Criterio de Nyquist	158
5.3.2. Análisis de Estabilidad	166
6. Instrumentación	169
6.1. El tubo Pitot	169
6.1.1. Funcionamiento	170
6.1.2. Medidas multidimensionales	172
6.1.3. Fuentes de error en las medidas con el tubo Pitot	173
6.1.4. Tipos de sensores	175
6.2. Anemómetros Térmicos	180
6.2.1. Funcionamiento	180
6.2.2. Medidas multidimensionales	186
6.2.3. Fuentes de error en las medidas del CTA	190
6.2.4. Tipos de sensores	194
6.3. Anemometría Laser Doppler	198
6.3.1. Funcionamiento	198
6.3.2. Medidas multidimensionales	204
6.3.3. Fuentes de error en la LDV	204
6.3.4. Tipos de sensores	205
6.4. Comparación entre métodos de medición de velocidad	205
7. Bibliografía	209

Capítulo 3

Modelos y Respuesta Dinámica



El objetivo principal en un sistema de control es lograr, a través de los principios de retro-alimentación (feedback), mantener la salida del sistema en un valor pre-determinado, aún en presencia de perturbaciones externas o variaciones internas de los parámetros del sistema. Ejemplos típicos son mantener constante la velocidad angular de un motor eléctrico o la actitud de vuelo de un avión.

Para llevar a cabo un buen diseño del sistema de control, debemos obtener un modelo del sistema basado en ecuaciones diferenciales y/o algebraicas, para luego evaluar su respuesta, antes de decidir introducir un lazo de control.

3.1. Sistemas Dinámicos

Esta sección constituye un repaso sobre los conceptos, principios y leyes, utilizados corrientemente en el estudio de los sistemas dinámicos.

3.1.1. Mecánicos

Para analizar sistemas mecánicos, podemos aplicar las leyes de Newton del movimiento en forma translacional o rotacional:

$$\sum_j \mathbf{F}_j = m\mathbf{a} \quad (3.1)$$

$$\sum_j \mathbf{M}_j = I\alpha \quad (3.2)$$

Donde a, m, I, α son aceleración, masa, momento de inercia y aceleración angular respectivamente. Otra forma, más rápida (pero menos intuitiva) es aplicar la formulación Lagrangiana. El Lagrangiano se define como: $L(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) = T - V$, donde T, V son la energía cinética y potencial del sistema y q es una coordenada generalizada. Una vez que Ud. ha escrito el Lagrangiano, puede obtener las ecuaciones que gobiernan el sistema escribiendo:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Estas son las ecuaciones de Euler-Lagrange tan útiles en mecánica clásica ¹

Un ejemplo simpático es el sistema mecánico de la Figura 3.1 a). Un bloque moviéndose horizontalmente, sometido a una fuerza de tracción u y una fuerza de roce $f_r = b\dot{x}$ proporcional a la velocidad del móvil de masa M .

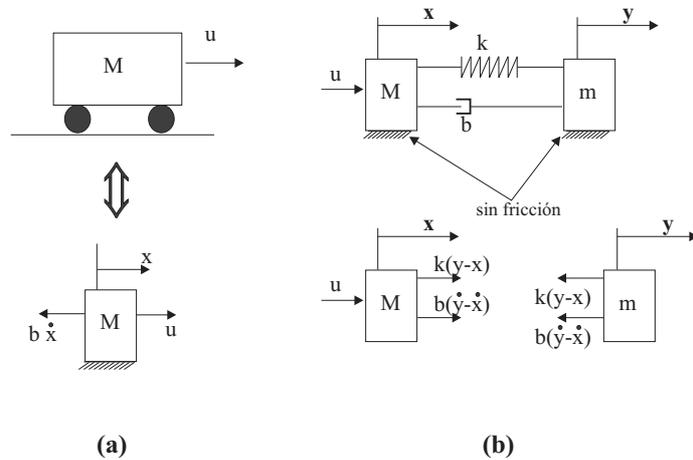


Figura 3.1: Sistemas translacionales

La ecuación resultante es:

$$u - b\dot{x} = M\ddot{x}$$

¹H.Goldstein, Classical Mechanics, 2nd Ed. Wiley and Sons

O lo que es lo mismo:

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} = \frac{1}{M}u$$

Otro ejemplo es el de la Figura 3.1 b), donde dos masas están conectadas entre ellas a través de un resorte y un amortiguador. No se considera roce. La fuerza (ley de Hooke) debida la resorte es proporcional al desplazamiento relativo entre ambas masas. La fuerza ejercida por amortiguador es proporcional a la velocidad relativa entre ambas. Así obtenemos que:

$$\begin{aligned} u + b(\dot{y} - \dot{x}) + K(y - x) &= M\ddot{x} \\ -K(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x}) &= m\ddot{y} \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{b}{M}(\dot{x} - \dot{y}) + \frac{K}{M}(x - y) &= \frac{1}{M}u \\ \ddot{y} + \frac{b}{m}(\dot{y} - \dot{x}) + \frac{K}{m}(y - x) &= 0 \end{aligned}$$

Otra aplicación de las leyes de Newton se encuentra en los modelos de satélites y su control como se ve en la Figura 3.2 a).

Para analizar estos sistemas de tres ejes, se realiza un análisis por cada eje a la vez. En la figura 3.2 b) se tiene un sistema mono-eje, donde el movimiento es efectuado en forma perpendicular al eje del sistema.

Para la figura 3.2 a), el ángulo descrito por la orientación del satélite, debe medirse con respecto a un sistema inercial, sin aceleraciones angulares. La fuerza de control proviene de los jets de reacción que producen un torque ($F_c d$) alrededor del centro de masa. Regularmente hay perturbaciones externas al satélite provenientes del viento solar que ejerce fuerzas sobre los paneles solares del satélite. Aquí la ecuación del movimiento es:

$$F_c d + M_D = I\ddot{\theta}$$

En dicho sistema, se mide el ángulo θ de las señales enviadas por la antena y se usa estas mismas señales para activar los jets de control. Para el sistema simplificado de la figura 3.2 b), las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K(\theta_1 - \theta_2) &= M_c + M_D \\ I_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + K(\theta_2 - \theta_1) &= 0 \end{aligned}$$

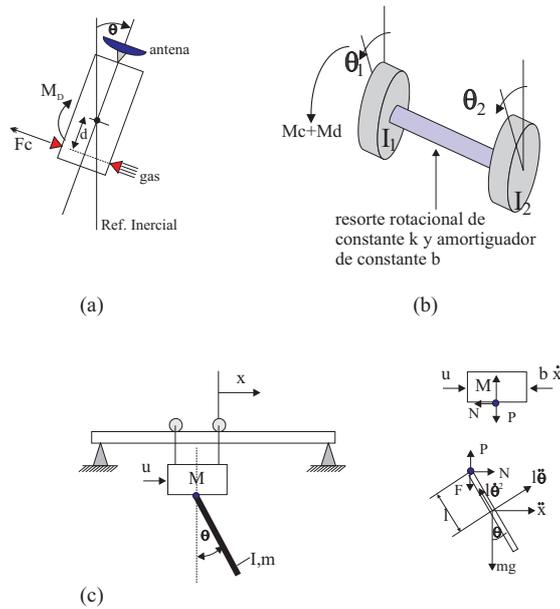


Figura 3.2: Sistemas rotacionales

Un sistema combinado, translacional y rotacional es el péndulo en movimiento de la figura 3.2 c). Para el carro, la ley de Newton nos dice,

$$M\ddot{x} + b\dot{x} = u - N$$

Para el péndulo, la ley de Newton nos dice que en dirección \hat{x}

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

En la dirección \hat{y} , nos dice que:

$$P \sin \theta + N \cos \theta - mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos \theta$$

Para el péndulo, si aplicamos la ley de Newton en su versión rotacional con respecto al centro de masa (y no al pivote que es más difícil) tenemos:

$$Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta}$$

Las fuerzas de reacción se determinan fácilmente combinando las dos últimas ecuaciones. Se obtiene una ecuación muy similar a la de un péndulo simple pero con una fuerza de forzamiento que depende de la aceleración del carro.

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta$$

Sin embargo aún se necesita una ecuación describiendo la dinámica del carro sin la fuerza de reacción N . Para ello se elimina N de las ecuaciones para la translación del carro y el péndulo.

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = u$$

Que pasa si consideramos movimientos pequeños alrededor del eje vertical ?. Las funciones trigonométricas se escriben : $\cos \theta \sim 1, \sin \theta \sim \theta, \dot{\theta}^2 \sim 0$, con lo cual las dos ecuaciones anteriores se simplifican bastante:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\theta = -ml\ddot{x} \quad (3.3)$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (3.4)$$

3.1.2. Eléctricos

Los circuitos eléctricos consisten (como todos sabemos) en interconexiones entre fuentes de voltages y corrientes, entre elementos pasivos como resistencias, condensadores e inductancias. Entre elementos activos como el Amplificador Operacional (AmOp). Estos componentes forman generalmente parte de sistemas de control con retro-alimentación. El amplificador operacional en sí, comporta elementos complejos de feedback. Algunos de los métodos de control más famosos fueron desarrollados por los ingenieros dedicados a la concepción y diseño de AmOps. En este repaso sólo veremos las variables que describen las relaciones entre los distintos componentes de los circuitos eléctricos.

Los símbolos típicamente usados en circuitos eléctricos lineales se aprecian en la Figura 3.3 a). En el ámbito de la electrónica, es fácil incrementar el número de elementos eléctricos de un circuito agregando diodos y transistores, así como intrincadas interconexiones entre entre ciertos de esos elementos. En procesamiento de señales y teoría de sistemas de control, el objetivo más típicamente buscado es la amplificación, y la idealización de esta función se logra a través del AmOp (Figura 3.3 b).

El símbolo del AmOp en la figura 3.3 b), es nada menos que la integración de un gran número de transistores. Típicamente los AmOp pueden amplificar con ganancias (DC o a frecuencia nula) desde $A_0 = 10^5$ a 10^7 . Teóricamente uno considera $A_0 = \infty$ para efectos de los cálculos con estos elementos activos.

Para el análisis de circuitos electrónicos Ud se debe acordar de las Leyes de Kirchhoff.

Ley de corrientes La suma algebraica de todas las corrientes en un nodo es cero

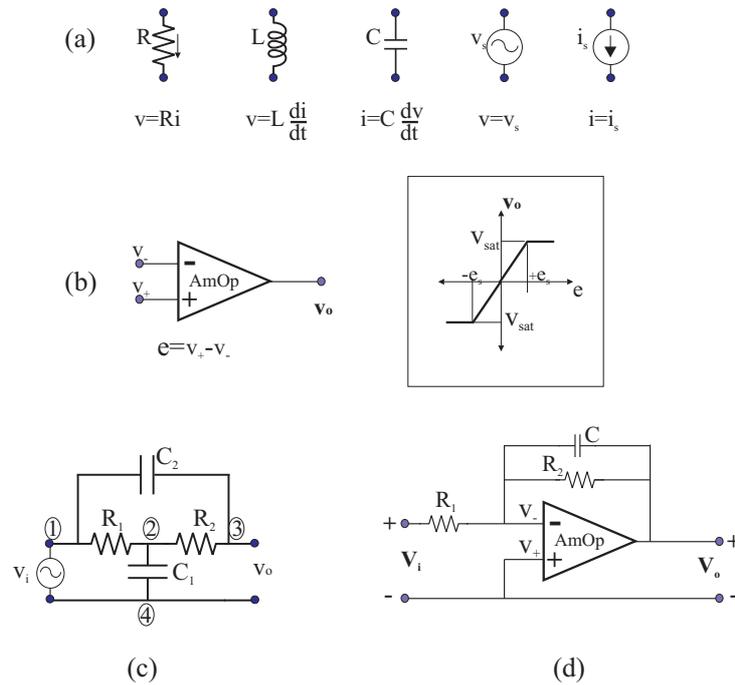


Figura 3.3: Símbolos de elementos en circuitos eléctricos

Ley de voltages La suma algebraica de todos los voltages tomados en una malla cerrada (loop) es cero.

Considere el circuito de la figura 3.3c). Usamos la ley de voltages de Kirchhoff para establecer la trivialidad:

$$v_1 = v_i$$

Usando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo 2, tenemos la ecuación sgte:

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_1 \frac{dv_2}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

Y en el nodo 3, la ley de corrientes de Kirchhoff nos dice:

$$\frac{v_3 - v_2}{R_2} + C_2 \frac{d(v_3 - v_1)}{dt} = 0 \quad (3.6)$$

Estas tres ecuaciones diferenciales describen completamente (en la aproximación lineal) el circuito. Como ejercicio, podemos re-escribir estas ecuaciones, como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden si seleccionamos el voltage en los condensadores como incógnitas: v_{C_1}, v_{C_2} . Aquí,

$v_{C_1} = v_2$, $v_{C_2} = v_1 - v_3$ y $v_1 = v_i$. Entonces, $v_1 = v_i$, $v_2 = v_{C_1}$ y $v_3 = v_i - v_{C_2}$. En términos de v_{C_1} y v_{C_2} la ecuación 3.5 queda:

$$\frac{v_{C_1} - v_i}{R_1} + \frac{v_{C_1} - (v_i - v_{C_2})}{R_2} + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = 0$$

Con lo cual, si arreglamos un poco esta ecuación:

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_{C_1} - \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_2} \right) v_{C_2} + \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_i$$

En términos de v_{C_1} y v_{C_2} , la ecuación 3.6 se convierte en:

$$\frac{v_i - v_{C_2} - v_{C_1}}{R_2} + C_2 \frac{d}{dt}(v_i - v_{C_2} - v_i) = 0$$

Y en forma normal,

$$\frac{dv_{C_2}}{dt} = -\frac{v_{C_1}}{C_2 R_2} - \frac{v_{C_2}}{C_2 R_2} + \frac{v_i}{C_2 R_2}$$

Considere el circuito típico para AmOps de la figura 3.3 d). El análisis de los nodos del circuito nos dice que la ley de corrientes en el nodo 1 es:

$$\frac{v_i - v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_0}{R_2} + C \frac{d}{dt}(v_1 - v_0) = 0$$

Sabemos que la ley lineal para el AmOp es: $v_0 = -A_0 v_1$. Si hacemos $A_0 \rightarrow \infty$, entonces $v_1 = 0$ y la ecuación se reduce a:

$$-\frac{v_i}{R_1} - \frac{v_0}{R_2} - C \frac{dv_0}{dt} = 0$$

Finalmente si hacemos $R_2 \rightarrow \infty$ (Circuito abierto), entonces:

$$-C \frac{dv_0}{dt} = \frac{v_i}{R_1}$$

O lo que es lo mismo,

$$v_0 = -\frac{1}{R_1 C} \int^t v_i(t') dt' \quad R_2 = \infty$$

Nada más y nada menos que un integrador.

3.1.3. Electromecánicos

Antes que nada vamos a presentarle el conjunto de ecuaciones que describen las leyes de la electrodinámica clásica. Son cuatro ecuaciones lineales describiendo la evolución del campo eléctrico \mathbf{E} (Volts/m o N/C) y el campo magnético \mathbf{B} (Tesla) asociado a la presencia y dinámica de cargas eléctricas en el espacio libre.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_o} \rho \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J} + \epsilon_o \mu_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$(3.11)$$

Donde la permitividad del espacio libre vale $\epsilon_o = 8,85 \cdot 10^{-12}$ [C²/Nm²] y la permeabilidad del espacio libre vale $\mu_o = 1,25 \cdot 10^{-6}$ [Wb/Am]. La densidad de carga es ρ en [C/m³]. La variable \mathbf{J} es un vector densidad de corriente, que experimentalmente se encuentra que es proporcional al campo eléctrico: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, con σ la conductividad eléctrica del material.

La cuarta ecuación de Maxwell resume a la primera relación fundamental entre corriente y magnetismo: Ley de Ampère. La relación entre el campo magnético originado por la circulación de una corriente en una espira conductora eléctrica. Si aplicamos el teorema de Stokes, tenemos que:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

Con lo cual, la cuarta ecuación de Maxwell en presencia de sólo un campo magnético variable ($\mathbf{E} = cte$) queda

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

Como la corriente I es exactamente la integral del lado derecho, entonces:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o I$$

Aquí I es la corriente total a través del contorno C . Con lo cual, esta ley nos permite, si la geometría es suficientemente simple, calcular el campo magnético en distintas configuraciones, a condición de elegir sabiamente el contorno cerrado C .

En el caso de una bobina circular de razón N/L vueltas/largo (corriente I), con el contorno C como se advierte en la figura 3.4, y despreciando el campo magnético al exterior de ella, se tiene que:

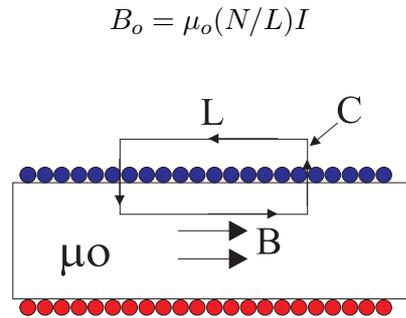


Figura 3.4: (a) Bobina en corte, de razón N/L espiras/largo. La corriente entra por abajo (rojo) y sale por arriba (azul)

De manera similar, en un conductor toroidal, con una bobina enrollada N veces en él, pasando una corriente i , se puede estimar el campo magnético promedio, $B = |\mathbf{B}|$ al interior del núcleo toroidal considerando un contorno C similar al anterior.

$$B = \frac{\mu}{2\pi R} Ni$$

Donde $B, R, N, i, \mu = \mu_r \mu_o$ son el campo magnético (Wb/m^2) el radio del toro (m), el número de espiras involucrado, la corriente (A) y la permeabilidad magnética del material del anillo toroidal ($\text{Wb}/\text{A m}$). En el aire $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ ($\text{Wb}/\text{A m}$). Para un material ferromagnético (fierro) μ puede ser miles de veces más grande que en aire.

El segundo efecto electromagnético interesante está gobernado por la ley de Faraday, descrita por la segunda ecuación de Maxwell. Si Ud. usa el teorema de Stokes, encontrará que:

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{\mathcal{E}} = - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}_{\Phi}$$

Donde Φ es el *Flujo* del campo magnético. Una variación de Φ creará una circulación del campo eléctrico en un conductor, creará una fem \mathcal{E} (fuerza electromotriz o potencial). Es decir, si tiene una espira C enfrentada a un campo \mathbf{B} donde el flujo Φ varía con respecto al tiempo (ya sea porque \mathbf{B} varía, o porque el área Σ efectiva varía), obtendrá una diferencia de potencial en los extremos de la espira, que podrá medir simplemente con un voltímetro sensible.

Visto de otro modo, tenemos otro efecto electromagnético interesante: una carga q moviéndose con velocidad \mathbf{v} en un campo magnético \mathbf{B} sufre una fuerza (Fuerza de Lorentz) dada por (si $\mathbf{E} = 0$):

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Si la carga se desplaza a una velocidad v en un conductor recto de largo l , donde la intensidad de campo magnético es B (Tesla), la fuerza correspondiente en Newtons es:

$$F = Bli$$

Ahora estamos en condiciones de considerar la dinámica de un simple parlante, como en la figura 3.5 a).

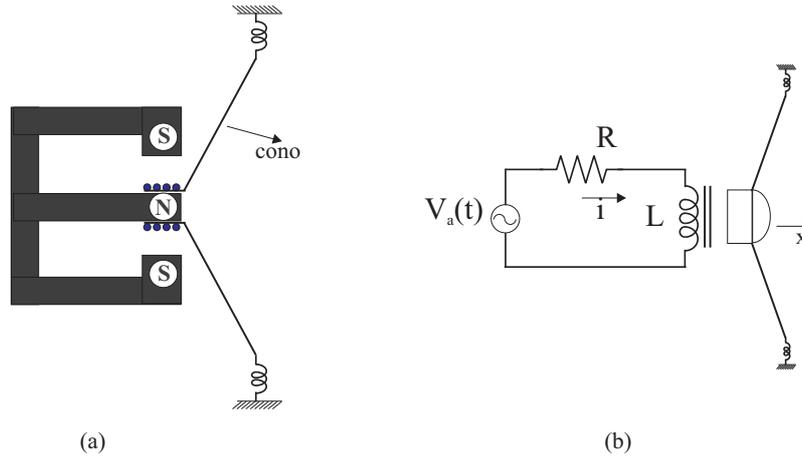


Figura 3.5: (a) Geometría de un parlante y circuito equivalente (b)

El imán permanente establece un campo magnético radial (cte.) en el gap cilíndrico entre los polos del imán. Cuando una corriente fluye en la bobina, la fuerza de Lorentz creada causa que la bobina se mueva hacia la derecha o la izquierda y el cono a su vez se desplace, con lo cual transmite fluctuaciones de presión que serán audibles o no dependiendo de la frecuencia con que varíe la corriente en la bobina.

Escribamos un modelo de este sistema. Aproximamos los efectos del aire como si el cono tuviese masa M y una amortiguación viscosa de coeficiente d . Supongamos que el imán entrega 0,5 T y la bobina tiene 20 vueltas con 2 cm de diámetro, con lo cual $l = 20 \cdot 2\pi/100 = 1,26$ m. Entonces la fuerza es $F = 0,63i$ N. La ecuación mecánica para la masa de aire desplazada por el cono es simplemente:

$$M\ddot{x} + d\dot{x} = 0,63i$$

Sin embargo debemos considerar otro efecto. Sabemos que si una carga se mueve dentro de un conductor sumergido en un campo magnético, se establece un voltaje en los extremos del conductor de signo opuesto (Ley de Lenz):

$$e(t) = -Blv$$

Así, en el parlante esta ley queda: $e_{bobina} = -0,63\dot{x}$.

Si consideramos el circuito de la figura 3.5 b) ambos efectos tienen importancia, con lo cual el sistema es descrito por dos ecuaciones diferenciales acopladas. Para la parte mecánica:

$$M\ddot{x} + d\dot{x} = 0,63i \quad \text{y la parte eléctrica} \quad L\frac{di}{dt} + Ri = v_a - 0,63i$$

Una aplicación inmediata de la teoría de control sería por ejemplo, considerar que la señal de entrada v_a esta compuesta por un tono determinado, $v_a(t) = A(t)e^{2\pi j\nu t}$. Pero sin embargo la amplitud $A(t)$ contiene ruido: $A(t) = A_0 + \epsilon(t)$. Si queremos que el tono acústico de salida mantenga un valor prefijado en intensidad $|A(t)| = cte$ debemos agregar al sistema un lazo de feedback de manera de compensar instantáneamente las fluctuaciones de amplitud de la señal de entrada.

Problema: Vibraciones forzadas

Considere una masa m acoplada con un resorte de constante k y un amortiguador de constante c . Primero identificamos la fuerza del sistema, y luego escribimos la ley de Newton:

$$m\ddot{x} + kx + \zeta\dot{x} = F_o \cos(\omega t)$$

Esta es la ecuación de un oscilador forzado con amortiguamiento. Es posible transformar esta ecuación usando la TL o la TF y explicar cómo se comporta la posición de la masa m ($x(t)$) en función de la frecuencia de forzamiento ω . La respuesta del sistema será máxima para una cierta frecuencia, ω_r , denominada frecuencia de resonancia. Discuta el rol del amortiguamiento ζ en esta frecuencia y analice la curva de resonancia.

3.1.4. Fluidos

Es común encontrar sistemas de control orientados a la regulación de temperatura de un sistema sólido o fluido. Los modelos dinámicos de control en sistemas compensados en temperatura involucran generalmente flujos y almacenaje de energía térmica. La ley de Fourier (conducción lineal), dice que el flujo de calor en una substancia es proporcional a una diferencia de temperatura ($T_1 > T_2$) a través de la substancia o material $q = -k\nabla T$, donde las variaciones de flujo de calor q van a determinar la evolución espacial y temporal de la temperatura del sistema. De manera más general, la ecuación de conservación de la energía :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T$$

donde ρ, C_p, k son densidad, calor específico y conductividad térmica respectivamente. Esta ecuación nos indica que tanto en sistemas sólidos como fluidos, es la temperatura, T , la variable sensible que generalmente deberemos medir y luego controlar.

Al realizar un análisis aproximado de la ecuación obtenemos la constante de tiempo del sistema τ , elemento crucial en una estrategia de control. Consideremos el sistema en reposo ($\mathbf{v} = 0$) y asumimos que los cambios ocurren sobre una escala espacial (tamaño) L durante un tiempo τ

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \sim \rho C_p \frac{\Delta T}{\tau} \quad \text{también} \quad k \nabla^2 T \sim k \frac{\Delta T}{L^2} \quad (3.12)$$

$$\text{con lo cual} \quad \tau \sim \frac{\rho C_p L^2}{k} = \frac{\rho C_p L^3}{kL} \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

Es interesante notar que τ crece con la masa del sistema ρL^3 y decrece con la conductividad térmica. Para sistemas puramente fluidos (Newtonianos), son las ecuaciones de Navier Stokes las que regirán la dinámica del sistema, a través de variaciones de la velocidad \mathbf{v} y presión p en cada punto del sistema.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

donde ρ, μ son densidad y viscosidad dinámica respectivamente.

3.2. Linealización

Una vez que las ecuaciones del sistema han sido escritas, nos damos cuenta que en general el sistema tiene un comportamiento no lineal. Una manera simple de estudiar dichos sistemas es linealizarlos. Para poder linealizar las ecuaciones debemos justificar primero. Como en teoría de sistemas de control uno quiere operar ALREDEDOR de un punto de funcionamiento cerca de la referencia impuesta, el proceso de linealización es aceptado, siempre y cuando nuestro sistema no se aleje demasiado de dicho punto, pues las ecuaciones lineales perderían su validez.

Consideremos un ejemplo: La levitación magnética de una esfera metálica en la figura 3.6 a).

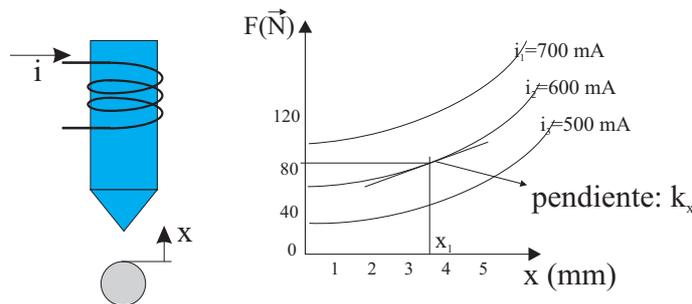


Figura 3.6: Sistema de Levitación, Diagrama, Curvas

La ecuación del movimiento de la esfera es:

$$m\ddot{x} = f(x, i) - mg$$

La fuerza $f(x, i)$ está descrita por las curvas experimentales de la figura 3.6 b). Con una corriente de $i_2 = 600$ mA y desplazamiento x_1 , la fuerza magnética f sólo va a cancelar la fuerza gravitatoria $mg = 82 \times 10^{-3}$ N. ($m = 8,4$ grs). Entonces vamos a contruir un modelo linealizado alrededor del punto (x_1, i_2) .

Escribimos la fuerza como una EXPANSIÓN EN SERIE DE TAYLOR :

$$f(x_1 + \delta x, i_2 + \delta i) = f(x_1, i_2) + K_x \delta x + K_i \delta i + \dots$$

En la curva experimental, las ganancias lineales o pendientes respectivas son: $K_x = 14$ N/m. Pero para obtener K_i se necesita un cambio de fuerza con respecto a un cambio de corriente en $x = x_1$. Se encuentra que para $i = i_1 = 700$ mA en $x = x_1$, la fuerza es $f_1 \sim 122 \times 10^{-3}$ N; y en $i = i_3 = 500$ mA, la fuerza es $f_3 \sim 42 \times 10^{-3}$ N. Entonces:

$$K_i \simeq \frac{f_1 - f_3}{i_1 - i_3} = 0,4 \times 10^{-3} N$$

Así obtenemos una aproximación *lineal* de la fuerza en función del desplazamiento y la corriente.

$$f(x, i) \simeq f(x_1, i_2) + 14\delta x + 0,4\delta i$$

La ecuación del movimiento adquiere una representación lineal, porque como $x = x_1 + \delta x \Rightarrow \ddot{x} = \delta \ddot{x}$, con lo cual,

$$m\delta \ddot{x} = f(x, i) - mg$$

3.2.1. Formulas generales

Los pasos que acabamos de describir se pueden escribir en notación compacta usando una notación matricial. En esta notación el modelo del sistema se escribe:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Donde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ es el vector de estado y $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ es el vector de funciones que establece las ecuaciones. La solución al equilibrio es $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$, de manera que se cumpla $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$. Se define la matriz \mathbf{F} como la matriz de elementos $[\delta f_i / \delta x_j]_{x_0, u_0}$, donde \mathbf{x}_0 y \mathbf{u}_0 son los valores al equilibrio. La matriz \mathbf{G} tiene elementos $[\delta f_i / \delta u_j]_{x_0, u_0}$. Con esas derivadas parciales, la ecuación del modelo puede escribirse para desviaciones con respecto a la posición de equilibrio $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$,

$$\dot{\mathbf{x}}_0 + \delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{F}(t)\delta\mathbf{x} + \mathbf{G}(t)\delta\mathbf{u} + O(2)$$

Así las ecuaciones linealizadas son:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\delta\mathbf{x} + \mathbf{G}\delta\mathbf{u}$$

Si hacemos un escalamiento temporal, $\tau = \omega_0 t$ esta ecuación queda:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\omega_0} (\mathbf{F}\delta\mathbf{x} + \mathbf{G}\delta\mathbf{u})$$

Si hacemos un escalamiento espacial (amplitudes) el término $\delta\mathbf{x}$ es reemplazado por $\mathbf{y} = \mathbf{D}_x^{-1}\delta\mathbf{x}$, donde \mathbf{D}_x es una matriz diagonal de factores de escalamiento en amplitud. Para \mathbf{u} hacemos un escalamiento $\mathbf{v} = \mathbf{D}_u^{-1}\delta\mathbf{u}$. Con estas substituciones nuestras ecuaciones quedan:

$$\mathbf{D}_x \dot{\mathbf{y}} = \frac{1}{\omega_0} \mathbf{F} \mathbf{D}_x \mathbf{y} + \frac{1}{\omega_0} \mathbf{G} \mathbf{D}_u \mathbf{v} \quad (3.15)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{1}{\omega_0} \mathbf{D}_x^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D}_x \mathbf{y} + \frac{1}{\omega_0} \mathbf{D}_x^{-1} \mathbf{G} \mathbf{D}_u \mathbf{v} \quad (3.16)$$

3.2.2. Expansión en Serie de Taylor

La expansión en serie de Taylor para una función de una variable en torno a un punto x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (3.17)$$

Donde las derivadas parciales deben evaluarse en el punto x_0 .

En el caso de una función de dos variables $f(x, y)$ la expansión de Taylor entorno al punto de operación x_0, y_0 es:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donde las derivadas parciales deben evaluarse en el punto (x_0, y_0) según corresponda.

3.3. Respuesta Dinámica

Hemos visto que los modelos de sistemas se encuentran bajo la forma de sistemas de ecuaciones diferenciales. Si el sistema está cerca del equilibrio, esas ecuaciones se pueden linealizar. Luego necesitamos la solución de esas ecuaciones, para lo cual hacemos uso de las transformadas de Laplace (Fourier). También podríamos resolver esas ecuaciones numéricamente, sin embargo para poder entender el comportamiento detallado del sistema, debemos recurrir a técnicas de análisis particulares. Entre esas técnicas hay dos de ellas que analizaremos en detalle en el próximo capítulo. Una corresponde al estudio del movimiento y ubicación de polos y ceros en el plano complejo, y la otra estudia la respuesta en frecuencia del sistema. En ambos casos es necesario conocer la función de transferencia del sistema y por eso veremos una técnica para deducir la función de transferencia de un sistema que presenta muchos componentes.

3.3.1. Regla de Mason

S.J. Mason (1953, 1956) definió dos conceptos útiles para calcular la función de transferencia de un sistema multicomponente.

1. GANANCIA DIRECTA, GD : El producto de las ganancias de los componentes que forman el camino directo entre la entrada y la salida del sistema.
2. GANANCIA RETROACCIÓN, GR : El producto de las ganancias que forman un contorno cerrado, es decir partiendo desde una variable, y volviendo a ella misma.

Esta versión simplificada de la regla fue deducida al analizar la ganancia de un circuito con un sólo loop o lazo de retro-alimentación, como vimos en el capítulo anterior.

La regla es la siguiente: *La ganancia o función de transferencia de un sistema retro-alimentado, está dada por la suma de las ganancias directas dividida por $1 \pm$ la suma de las ganancias de retroacción.*

$$\frac{S}{E} = \frac{\sum GD}{1 \pm \sum GR}$$

Apliquemos esta regla al ejemplo de la figura 3.7.

Camino Directo	Ganancia Directa
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 9$	$H_1 H_2 H_5$
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9$	$H_1 H_6$
Camino Loop	Ganancia Loop
$2 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow$	$H_1 H_3$
$2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 2$	$H_1 H_2 H_4$

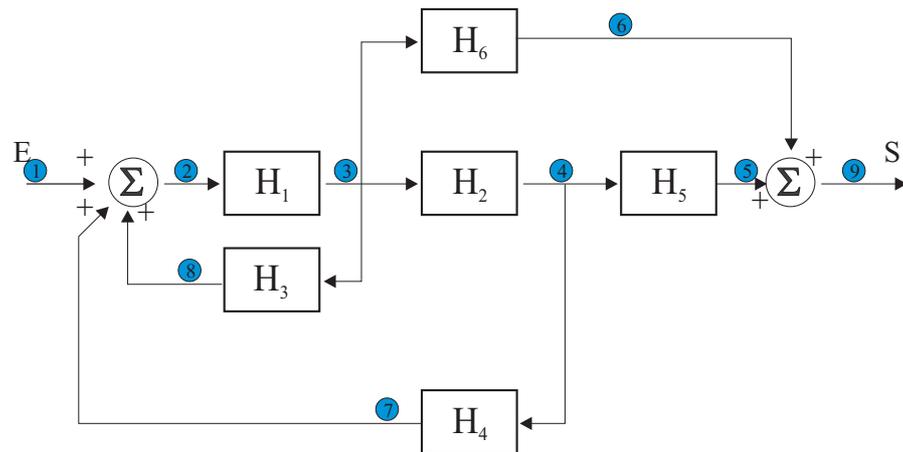


Figura 3.7: Sistema multicomponente. Regla de Mason

La solución de este sistema es, según la regla:

$$\frac{S}{E} = \frac{H_1 H_2 H_5 + H_1 H_6}{1 - H_1 H_3 - H_1 H_2 H_4}$$

Esta regla es sin embargo un caso particular de la regla general, ya que a veces no todos los elementos están conectados entre sí.

3.3.2. Respuesta Transiente

El primer paso al analizar un sistema de control es derivar un modelo matemático de éste para luego analizar su comportamiento frente a diferentes señales de entrada. En la práctica, éstas señales no son conocidas a priori, y en general son aleatorias, con lo cual la entrada instantánea no se conoce con exactitud. Por ese motivo se han seleccionado señales de entrada de ensayo clásicas (bien conocidas) para poder excitar el sistema y analizar su salida y así inferir su comportamiento frente a señales reales que se asemejan a las señales de ensayo.

Señales de ensayo típicas son:

1. impulso $x(t) = \delta(t)$
2. rampa $x(t) = t$
3. escalón $x(t) = \Theta(t)$
4. aceleración $x(t) = t^2$
5. sinusoides $x(t) = e^{j\omega t}$

La respuesta de un sistema estará dividida en dos partes: i) parte transiente con $d/dt \neq 0$ y ii) parte estacionaria con $d/dt \rightarrow 0$.

Respuesta en Sistemas de Primer Orden

La dinámica de un sistema de primer orden se puede representar con la ecuación,

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$$

y está definido por un sólo parámetro, τ , la constante de tiempo del sistema y por la señal forzante $x(t)$. Esta ecuación puede representar variados sistemas; Un filtro eléctrico RC , la descarga de un estanque de agua, el enfriamiento de una taza de café, hasta la descarga electrónica de un flash de una cámara.

Este tipo de sistema es LTI, y con ayuda de la transformada de Laplace, podemos obtener la función de transferencia, es decir, la razón entre la salida y la entrada,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

De igual manera, sabemos que la salida del sistema puede escribirse a través de la función respuesta impulsional $h(t)$,

$$y(t) = \int_0^t x(\theta)h(t - \theta)d\theta$$

Aquí $h(t)$ es la respuesta del sistema a una entrada impulsiva $x(t) = \delta(t)$. Esto queda reflejado en la figura 3.8. En la práctica, es difícil crear físicamente una delta de Dirac, ya que siempre obtendremos una especie de impulso de duración finita (Típicamente una función cuadrada). Pero si disminuimos la duración del impulso unitario impuesto a la entrada del sistema, nos aproximamos a una delta de Dirac, y si la constante de tiempo del sistema es mucho más grande que la duración de nuestro impulso, podremos aproximarnos físicamente (para efectos prácticos) a la delta.

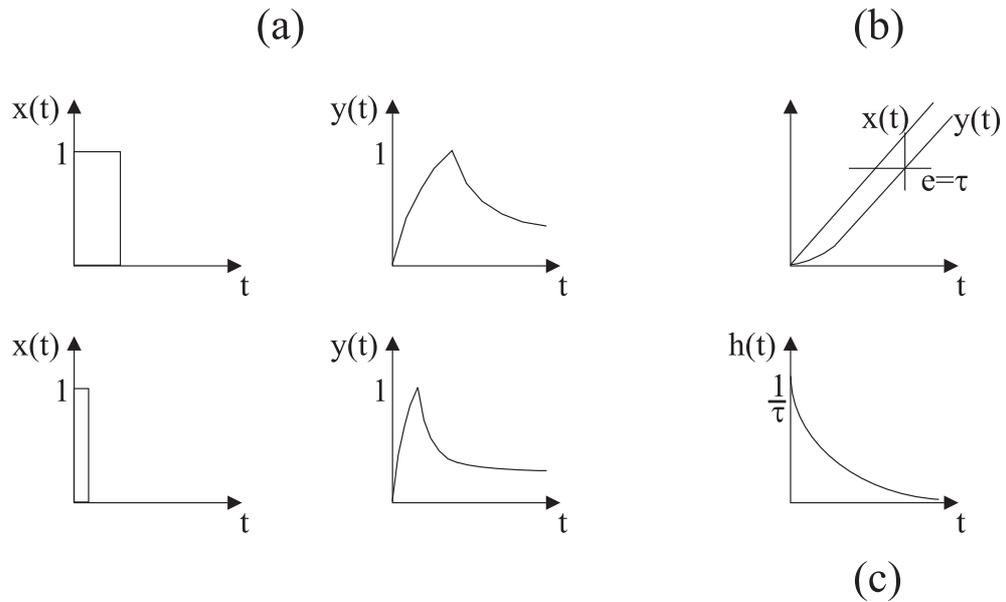


Figura 3.8: a) Curvas de respuesta de un sistema LTI de primer orden a un impulso de duración decreciente. b) Respuesta a una rampa. c) Respuesta a un Dirac

En un sistema de primer orden la función de transferencia posee potencias unitarias de la variable compleja $s \rightarrow s^1$ en su denominador. En nuestro caso, la función de transferencia $G(s) = 1/(\tau s + 1)$ del sistema nos permite escribir

$$Y(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} X(s)$$

Conocida la señal de entrada, $x(t) \Leftrightarrow X(s)$, podemos encontrar la respuesta $y(t)$ usando la TL⁻¹. Consideremos que la entrada al sistema es una función escalón $\Theta(t)$ (función de Heaviside), cuya TL es $1/s$ como puede Ud. verificar fácilmente. Así, nuestra ecuación queda:

$$Y(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{(\tau s + 1)}$$

Si calculamos la TL⁻¹, obtenemos la respuesta exponencial típica de un sistema de primer orden:

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau} \quad (t \geq 0)$$

La salida del sistema se va aproximando a 1 a medida que el tiempo $\rightarrow \infty$, porque la función escalón es unitaria.

La respuesta es diferente si Ud. considera como entrada una rampa unitaria: $x(t) = t \Leftrightarrow X(s) = 1/s^2$ (como Ud. puede verificar fácilmente). En este caso tenemos que expandir en fracciones parciales, si queremos obtener luego la TL^{-1} :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(\tau s + 1)} \frac{1}{s^2} \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{\tau s + 1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Así podemos obtener la TL^{-1} :

$$y(t) = t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \quad (t \geq 0)$$

Considere la función de error $e(t) = x(t) - y(t)$, es decir la diferencia entre la entrada y la salida. Esto es,

$$e(t) = \tau(1 - e^{-t/\tau})$$

Cuando el tiempo $\rightarrow \infty$ la exponencial $\rightarrow 0$ y la señal de error $e(t) \rightarrow \tau$. El error que comete el sistema en seguir a la rampa unitaria tiende a la constante de tiempo del sistema τ . Quiere decir que mientras más chica sea τ menor es el error del sistema, o mejor sigue el sistema la entrada. Este comportamiento se aprecia en la figura 3.8 b).

Finalmente analicemos la respuesta a una delta de Dirac, $x(t) = \delta(t)$ cuya TL es simplemente 1. Claramente lo que vamos a encontrar como respuesta es la respuesta impulsional $h(t)$ (pero en el espacio de Laplace es $G(s)$).

$$Y(s) = G(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} 1$$

Con lo cual, tomando la TL^{-1} tenemos:

$$y(t) = h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (t \geq 0)$$

La respuesta está reflejada en la figura 3.8 c), una exponencial decreciente.

Si Ud. pone atención a nuestra discusión, se dará cuenta que hay un proceso derivativo sistemático en la apariencia de la respuesta $y(t)$ frente a la función de entrada:

$$\begin{aligned}
 y(t)^{\text{delta}} &= \frac{dy(t)^{\text{escalon}}}{dt} \\
 y(t)^{\text{escalon}} &= \frac{dy(t)^{\text{rampa}}}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

3.3.3. Respuesta en Sistemas de Segundo Orden

Rol de Polos y Ceros en Sistemas de Orden Superior

En los sistemas de primer orden, el rol del único polo de la función de transferencia es gobernar la forma de la respuesta del sistema a una entrada $x(t)$ determinada (Dirac, escalón, rampa, etc.).

En el caso de una entrada tipo delta de Dirac, el polo aparece en la solución exponencial como el inverso de un tiempo característico del sistema ($1/\tau$) que es universal (y muy simple).

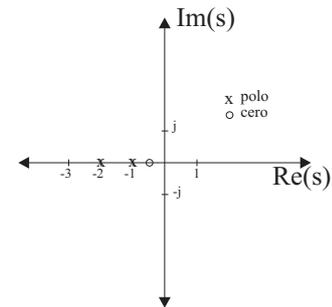


Figura 3.9: Notación de polos (x) y ceros (o) en el plano complejo

Sin embargo, los sistemas dinámicos de orden superior son más entretenidos, ya que el rol de polos (y ceros) enriquece (y complica) el comportamiento transiente de estos sistemas. Como es obvio, una vez que la función de transferencia ha sido obtenida, estamos en posición de analizar la respuesta de estos sistemas. Hemos dicho que cuando el sistema está descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas, la función de transferencia se puede expresar como el cociente entre dos polinomios $Nu(s)/De(s)$. Por ejemplo, un sistema de segundo orden gobernado por la ecuación diferencial sgte, es llevado al espacio de Laplace:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2\dot{u} + u$$

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2}U(s)$$

El numerador de la función de transferencia es: $Nu(s) = 2s + 1 = 2(s + 1/2)$ y el denominador es: $De(s) = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$. Si asumimos que Nu y De no tienen factores comunes (casi siempre es el caso), los valores de s tales que $De(s) = 0$ serán lugares donde $H(s)$ es infinita (diverge), éstos son los polos de $H(s)$. Aquí son $s = -1$ y $s = -2$. Por otro lado, los ceros de $H(s)$ son los valores de s que anulan Nu . Aquí hay un sólo cero $s = -1/2$. Estos polos y ceros describen

completamente a $H(s)$ salvo una constante multiplicativa, con lo cual uno puede dar una descripción cualitativa de $H(s)$ ploteando los lugares de polos y ceros en el plano complejo s (Figura 3.9).

Como la respuesta impulsional del sistema es la transformada inversa de $H(s)$, podemos interpretar a la respuesta impulsional como la *respuesta natural* del sistema, y podemos usar los polos y ceros para calcular la respuesta temporal e identificar la historia temporal del sistema sólo con los circuitos descritos por los polos y ceros. Por ejemplo, los polos identifican las clases de señales contenidas en la respuesta impulsional, como puede verse a través una expansión en fracciones parciales de $H(s)$.²

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \\ H(s) &= \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \end{aligned}$$

Los polos de esta $H(s)$ son $s = -1$ y $s = -2$. Con ayuda de la tabla de pares transformados de Laplace, podemos calcular $h(t)$,

$$\begin{aligned} h(t) &= -e^{-t} + 3e^{-2t} & t \geq 0 \\ h(t) &= 0 & t < 0 \end{aligned}$$

Vemos que la forma de las componentes de $h(t)$ están determinadas por los polos $s = -1, s = -2$. Esto es válido incluso en casos más complicados, y se afirma que la forma de $h(t)$ está dada por la ubicación de los polos de la función de transferencia.

Esos polos se aprecian en la figura 3.10, junto con ubicaciones de polos complejos también. Ahora, el rol del numerador *luego del proceso de expansión en fracciones parciales*, es determinar el tamaño de los coeficientes que multiplican cada componente.

Como e^{-2t} decae más rápido de e^{-t} , podemos decir que el polo $s = -2$ es más *rápido* que el polo $s = -1$, sin embargo no olvidar que es la señal la que decae más o menos rápido.

Un poco más complicado es la aparición de polos complejo conjugado, como por ejemplo podemos ver en la función de transferencia sgte:

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+5}$$

Los polos de esta función son $s = -1 \pm j2$, y la expansión en fracciones parciales puede ser llevada a cabo con el mismo razonamiento:

$$H(s) = \frac{(1+j4)/j4}{s+1+j2} + \frac{(1-j4)/(-j4)}{s+1-j2}$$

²Se sugiere que revise los detalles de la expansión en fracciones parciales al final de este capítulo o en un libro de cálculo

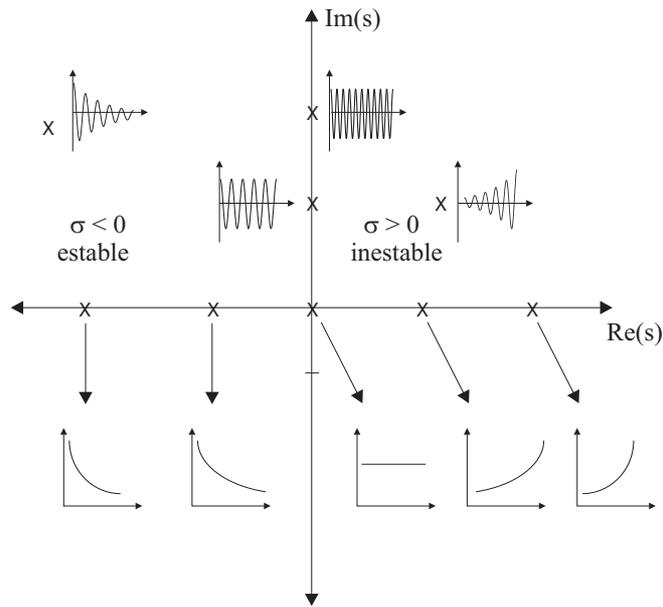


Figura 3.10: Respuesta temporal asociada a la posición del polo en el plano- s

$$\begin{aligned}
 &= \frac{K_1^*}{s + 1 + j2} + \frac{K_1}{s + 1 - j2} \\
 &= \frac{A}{2} \frac{e^{-j\theta}}{(s + 1 + j2)} + \frac{A}{2} \frac{e^{j\theta}}{(s + 1 - j2)}
 \end{aligned}$$

Donde K_1^* es el complejo conjugado de K_1 .

Nuevamente con la ayuda de la tabla de pares transformados de Laplace, la función respuesta impulsional es:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-t} e^{-2jt} + \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{-t} e^{j2t} & t \geq 0 \\
 h(t) &= 0 & t < 0 \\
 h(t) &= \frac{A}{2} e^{-t} (e^{-j(2t+\theta)} + e^{j(2t+\theta)}) & t \geq 0 \\
 h(t) &= A e^{-t} \cos(2t + \theta) & t \geq 0 \\
 h(t) &= 0 & t < 0
 \end{aligned}$$

Los coeficientes A y θ están dados por la ecuación de $H(s)$. Los polos actuales son complejos, con parte real (-1) e imaginaria $(+2, -2)$. En general los polos complejos van a tener una parte real σ y una parte imaginaria $j\omega$ dando origen a un transiente de la forma $ae^{-\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$.

En general a cada polo (de primer orden) real de valor $s = -a$, le corresponderá una respuesta natural de tipo e^{-at} , y cada par de polos complejos de valor $s = +\sigma \pm j\omega$ le corresponderá una respuesta natural de la forma $e^{+\sigma t} \cos(\omega t)$. Si $\sigma > 0$ el polo está ubicado en el primer cuadrante del plano- s con lo cual la exponencial va a crecer y el sistema es INESTABLE. Si $\sigma = 0$ la estabilidad

del sistema debe ser analizada en detalle. Si $\sigma < 0$ el sistema es ESTABLE (Figura 3.10).

3.3.4. Sistemas de Segundo Orden

Veamos ahora la respuesta de una función de transferencia con dos polos complejos. En la literatura de control, esta función es de segundo orden.

Un sistema de segundo orden posee potencias cuadráticas en el denominador de la función de transferencia (s^2) dando origen a dos polos (en general complejos).

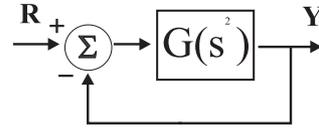


Figura 3.11: Sistema de segundo orden con retroalimentación unitaria. $R(s)$ es la señal de referencia, $Y(s)$ es la salida. K, J, F son coeficientes constantes del sistema

El sistema de la figura 3.11 es un sistema retroalimentado unitario típico que representa un servomecanismo. Su función de transferencia en lazo abierto ya es cuadrática en s ,

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + F)}$$

Si calculamos la función de transferencia en **lazo cerrado**, es decir, considerando la acción del símbolo Σ^\pm , e identificamos los 2 polos, obtenemos

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G}{1 + G} = \frac{K}{Js^2 + Fs + K} & (3.21) \\ H(s) &= \frac{K/J}{\left[s + \frac{F}{2J} + \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right] \left[s + \frac{F}{2J} - \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right]} \end{aligned}$$

Los polos de lazo cerrado son complejos si $F^2 - 4JK < 0$ y son reales si $F^2 - 4JK \geq 0$. Para obtener una forma genérica de tales sistemas hacemos el cambio de variable:

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \quad \frac{F}{2J} = \zeta\omega_n = \sigma$$

Con ello la función de transferencia de lazo cerrado se convierte en:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

El parámetro ζ es la *razón de amortiguamiento* y ω_n es la frecuencia natural *no amortiguada*. Los polos de esta función de transferencia están ubicados en un radio ω_n en el plano- s formando un

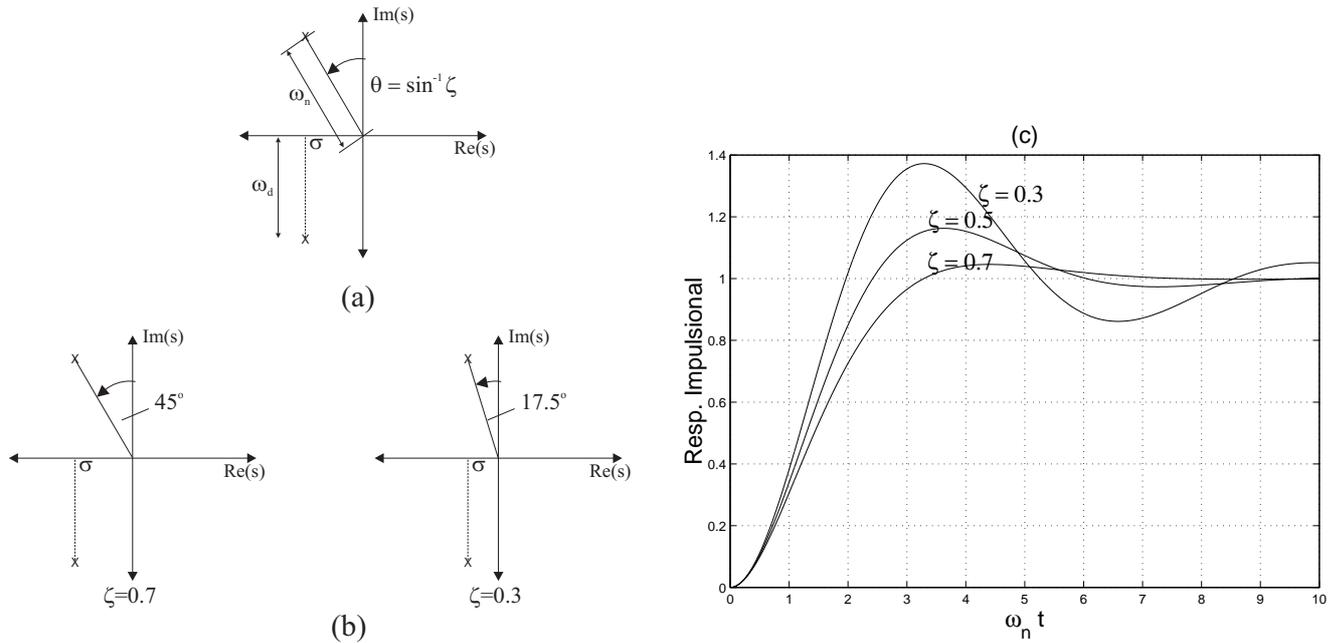


Figura 3.12: (a) Par de polos complejos en el plano- s . (b) Posición de los polos para cada valor del amortiguamiento ζ . (c) Respuesta al escalón unitario del sistema de segundo orden, para distintos valores del amortiguamiento ζ

ángulo $\theta = \sin^{-1} \zeta$. Como se ve en la figura 3.12 (a), gráficamente se tiene que: $\sin \theta = \sigma/\omega_n$ y el resultado anterior se obtiene al reemplazar $\sigma = \zeta\omega_n$.

Nos interesa resolver la respuesta de este tipo de sistemas frente a una entrada escalón unitaria. Si re-escribimos la función de transferencia $H(s)$, haciendo aparecer los polos:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

Los polos de $H(s)$ son $s = -(\sigma + j\omega_d)$, donde $\sigma = \zeta\omega_n$ y $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$.

Si el amortiguamiento es nulo, $\zeta = 0$, la frecuencia natural amortiguada coincide con la frecuencia natural no amortiguada $\omega_d = \omega_n$.

Esto se puede entender en el caso simple de un sistema oscilador idela (sin roce) forzado armónicamente. La amplitud del sistema diverje cuando la frecuencia de la señal de forzamiento se acerca a la frecuencia natural del sistema. En la práctica, la frecuencia de resonancia va a depender del parámetro de amortiguamiento del sistema, y con ello la respuesta en la resonancia será máxima (no va a diverjer).

La respuesta del sistema es $Y(s) = H(s)X(s)$, y al considerar una entrada escalón unitario $X(s) = 1/s$, podemos calcular la respuesta temporal $y(t)$ a través de la TL^{-1} .

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Calculando la TL^{-1} obtenemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right) \\ y(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (3.23)$$

La señal de error entre la entrada y la salida es $e(t) = x(t) - y(t)$, y en este caso obtenemos

$$e(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad (t \geq 0)$$

Este error muestra una oscilación amortiguada. Cuando $t \rightarrow \infty$ no habrá error $e(t) \rightarrow 0$.

Note que si $\zeta = 0$ la respuesta es oscilatoria no amortiguada, indicando que el sistema oscila indefinidamente.

En síntesis, es la posición de los polos en el plano complejo la que determina totalmente la respuesta del sistema. Si la señal de forzamiento es un escalón unitario, se espera que la respuesta del sistema se aproxime rápidamente a la forma de dicha señal de forzamiento.

3.3.5. Especificación en el Dominio Temporal

Si bien las respuestas transientes de la figura 3.12 c) son bastante informativas, es difícil recordarlas, por lo tanto vamos a definir 3 parámetros que caracterizan la respuesta temporal del sistema a una entrada tipo escalón unitario (Figura 3.13 a).

Rise Time, t_r

Existen dos definiciones de este tiempo. i) Es el tiempo que demora la salida del sistema en alcanzar el 90% del valor prefijado, valor de la respuesta en régimen estacionario. ii) Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar por primera vez $y(t) = 1$. Personalmente, creo que es más cómodo obtener

una estimación de t_r usando el criterio matemático de la definición ii). Este tiempo se puede obtener con la ecuación 3.24. Imponemos $y(t_r) = 1$:

$$y(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left(\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right)$$

Como la exponencial es distinta de cero, obtenemos que:

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

Así, t_r está dado por:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

Donde el ángulo $\beta = \pi/2 - \theta$ (ver figura 3.12).

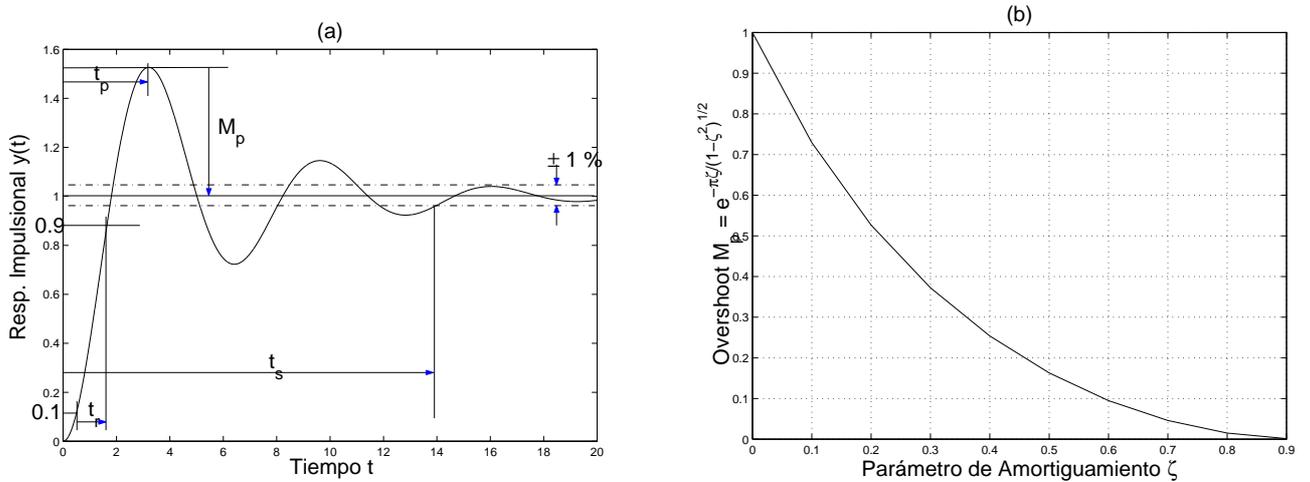


Figura 3.13: (a) Definiciones de Rising Time t_r , Settling time t_s y Overshoot M_p . (b) Evolución del Overshoot con el amortiguamiento

Overshoot, M_p

Es el valor máximo que alcanza la salida del sistema en el transiente. Este valor es fácil obtenerlo. La función de transferencia en Laplace es:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Ya hemos calculado la transformada inversa para encontrar $y(t)$ como respuesta al escalón:

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right)$$

Donde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ y $\sigma = \zeta\omega_n$.

Intentamos encontrar el máximo de $y(t)$ con $dy/dt = 0$. Calculamos la derivada de esta ecuación y la anulamos

$$\frac{dy}{dt} = e^{-\sigma t} \left(\frac{\sigma^2}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + \omega_d \sin(\omega_d t) \right) = 0$$

Esto ocurre para $\sin(\omega_d t) = 0$, o lo que es lo mismo: $\omega_d t_p = \pi$. Substituimos este valor en la expresión de $y(t)$, con lo cual

$$\begin{aligned} y(t_p) &= 1 + M_p = 1 - e^{\sigma\pi/\omega_d} \left(\cos \pi + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \pi \right) \\ y(t_p) &= 1 + e^{-\sigma\pi/\omega_d} \end{aligned}$$

Esto nos entrega una fórmula útil:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad 0 \leq \zeta < 1 \quad (3.24)$$

$$M_p \cong 1 - \frac{\zeta}{0,6} \quad 0 \leq \zeta \leq 0,6 \quad (3.25)$$

La evolución típica de M_p versus el parámetro de amortiguamiento ζ se puede apreciar en la figura 3.13.

Settling Time, t_s

Es tiempo que tarda la salida transiente del sistema en alcanzar un régimen cercano al estado estacionario. Se usa normalmente la banda de error del 1% del valor estacionario prefijado. Según la expresión de $y(t)$, el decaimiento del error con respecto a 1 está dado por la exponencial $e^{-\sigma t}$. Usando el criterio del 1%, el tiempo de decaimiento (settling time) t_s queda definido como ($\sigma = \zeta\omega_n$):

$$e^{-\zeta\omega_n t_s} = 0,01$$

Por lo tanto, numéricamente:

$$\zeta\omega_n t_s = 4,6 \quad \text{o} \quad t_s = \frac{4,6}{\zeta\omega_n}$$

Donde $\sigma = \zeta\omega_n$ es la parte real del polo.

Las ecuaciones que nos entregan t_r , M_p y t_s , caracterizan un sistema que no tiene ceros pero que tiene dos polos complejos de frecuencia natural no amortiguada ω_n , razón de amortiguamiento ζ y parte real σ .

CÓMO DISEÑAMOS UNA RESPUESTA DADA?: En síntesis, dado un sistema de segundo orden, debemos decidir *donde* deben ubicarse los polos de este tipo de sistema para cumplir con las especificaciones o requerimientos que nosotros imponemos. En resumen, queremos que el tiempo de subida (rising time) sea menor que un cierto valor $\leq t'_r$, que el overshoot sea menor que un cierto valor $\leq M'_p$ y que el settling time sea también menor que otro cierto valor $\leq t'_s$.

$$\omega_n \geq 1,8 \frac{1}{t'_r} \quad (3.26)$$

$$\zeta \geq 0,6(1 - M'_p) \quad 0 \leq \zeta \leq 0,6 \quad (3.27)$$

$$\sigma \geq 4,6 \frac{1}{t'_s} \quad (3.28)$$

Estas ecuaciones se pueden graficar en el plano- s como se aprecia en la figura 3.14 y serán usadas para satisfacer los requerimientos de la respuesta dinámica de los sistemas de control que veremos más adelante.

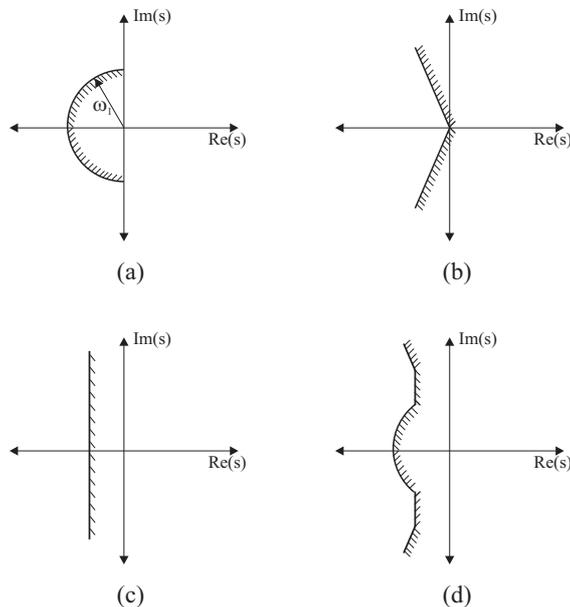


Figura 3.14: Regiones delineadas en el plano- s para cumplir requerimientos transientes del sistema. (a) Rising time (b) Overshoot, (c) Settling time, d) Simultaneidad de todos los casos

Problema

Considere un sistema como el de la figura 3.11, sometido a una entrada tipo escalón unitario, donde $\zeta = 0,6$ y $\omega_n = 5$ rad/s. Calcule el tiempo de subida t_r , el tiempo de peak t_p , el overshoot máximo M_p , y el tiempo de establecimiento t_s (para criterios de 2% y 5%)³.

3.3.6. Efecto de Ceros y Polos Adicionales

Lo que hemos visto es correcto para sistemas simples de segundo orden. Para sistemas más complicados podemos dar algunas recetas.

1. Rising Time t_r *lento*: Aumentar la frecuencia natural ω_n .
2. Overshoot M_p muy *alto*: Aumentar el amortiguamiento ζ
3. transiente muy *largo*: Mover los polos hacia la izquierda $\leftarrow \sigma$

En la etapa transiente, la influencia de los ceros de $H(s)$ es de modificar los coeficientes de amplitud de los términos exponenciales, cuya forma es decidida por los polos. Considere dos funciones $H_1(s), H_2(s)$ de denominador idéntico y numerador diferente, pero ambas normalizadas para tener la misma ganancia dc ($s = 0$):

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} H_2(s) &= \frac{2(s+1,1)}{1,1(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{2}{1,1} \left(\frac{0,1}{s+1} + \frac{0,9}{s+2} \right) \\ &= \frac{0,18}{s+1} + \frac{1,64}{s+2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Observe la dramática reducción de amplitud entre ambas funciones, por haber introducido un cero $s = -1,1$ en $H_2(s)$.

Efecto de un cero Adicional

Para considerar el efecto de un cero en la respuesta transiente, tomemos la función de transferencia de segundo orden con un cero parametrizado (α) y dos polos complejos.

³Solución: $t_r = 0,55$ s, $t_p = 0,785$ s, $M_p = 9,5\%$, $t_s(2\%) = 1$ s, $t_s(5\%) = 1,33$ s

$$H(s) = \frac{s/\alpha + 1}{s^2 + 2s + 5}$$

Esto es lo mismo que escribir

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} + \frac{1}{\alpha} \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$

Y si nos acordamos de la transformada de Laplace, vemos que el segundo término se parece a una derivada de $df/dt = sF(s)$, con lo cual, el rol del cero es amplificar los primeros valores de la respuesta transiente, *aumentando* así el Overshoot. Tendrá poca influencia en el Settling time t_s .

Si el cero está en el lado derecho del plano $-s$, el factor amplificador α será negativo $\alpha < 0$, y la derivada jugará en sentido opuesto, *disminuyendo* el Overshoot.

Efecto de un Polo Adicional

Si agrega un polo adicional a su sistema de segundo orden obtendrá un sistema de tercer orden. Que ocurre con la respuesta al escalón para este tipo de sistemas ?

Suponga que la función de transferencia de lazo cerrado al agregar un polo en $s = -p$, es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 p}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)}$$

Calculamos la respuesta al escalón unitario y obtenemos:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\Lambda + 1} \left\{ \Lambda \cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} (\Lambda + \epsilon) \sin \omega_d t \right\} - \frac{e^{-pt}}{\Lambda + 1} \quad (t \geq 0)$$

Donde $\Lambda = \epsilon\zeta^2(\epsilon - 2)$ y $\epsilon = p/\sigma$ ($\sigma = \zeta\omega_n$). Note que el término:

$$\Lambda + 1 = \zeta^2(\epsilon - 1)^2 + (1 - \zeta^2) > 0$$

Con lo cual el coeficiente del término e^{-pt} es siempre positivo. Entonces el efecto de un polo real $s = -p$ en la respuesta al escalón es de *reducir* el overshoot M_p y de *incrementar* el settling time t_s . El valor del parámetro $\epsilon = p/\sigma$ va a crear una familia de respuestas. Si Ud. tiene olfato, verá que es interesante graficar la respuesta para $1 < \epsilon < \infty$. Se dará cuenta que otro efecto del polo es de reducir el tiempo de subida t_r a condición que el valor de ϵ sea grande (~ 4).

3.3.7. Expansión en Fracciones Parciales

Para quién no recuerde la expansión en fracciones parciales, recuerde lo siguiente. En caso que la función de transferencia $H(s)$ posea polos diferentes debe descomponer $H(s)$ de la sgte. forma:

$$H(s) = \frac{Nu(s)}{De(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

Donde los coeficientes a_k los debe calcular como:

$$a_k = \left\{ \frac{Nu(s)}{De(s)}(s + p_k) \right\} \Big|_{s=-p_k}$$

En caso que $H(s)$ posea dos polos complejo conjugados (p_1, p_2) y n polos distintos:

$$H(s) = \frac{Nu(s)}{De(s)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s + p_1)(s + p_2)} + \frac{a_3}{s + p_3} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

Los coeficientes α_k se encuentran multiplicando la ecuación anterior en ambos lados por $(s + p_1)(s + p_2)$ y evaluando en $s = -p_1$. Esto nos entrega:

$$(\alpha_1 s + \alpha_2) \Big|_{s=-p_1} = H(s)(s + p_1)(s + p_2) \Big|_{s=-p_1}$$

Esta ecuación es compleja, con lo cual obtiene 2 ecs (Parte Real e Imaginaria) para encontrar los parámetros α_1, α_2 .

En el caso que $H(s)$ contenga un polo, p_1 , de multiplicidad r ,

$$H(s) = \frac{Nu(s)}{De(s)} = \frac{b_r}{(s + p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s + p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{b_1}{(s + p_1)}$$

Los coeficientes se calculan de la siguiente forma:

$$b_r = H(s)(s + p_1)^r \Big|_{s=-p_1} \quad (3.31)$$

$$b_{r-1} = \frac{d}{ds} \{H(s)(s + p_1)^r\} \Big|_{s=-p_1} \quad (3.32)$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{ds^j} \{H(s)(s + p_1)^r\} \right\} \Big|_{s=-p_1} \quad (3.33)$$

$$\vdots \quad (3.34)$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \{H(s)(s + p_1)^r\} \right\} \Big|_{s=-p_1} \quad (3.35)$$

Capítulo 4

Principios Básicos de Retro-Alimentación

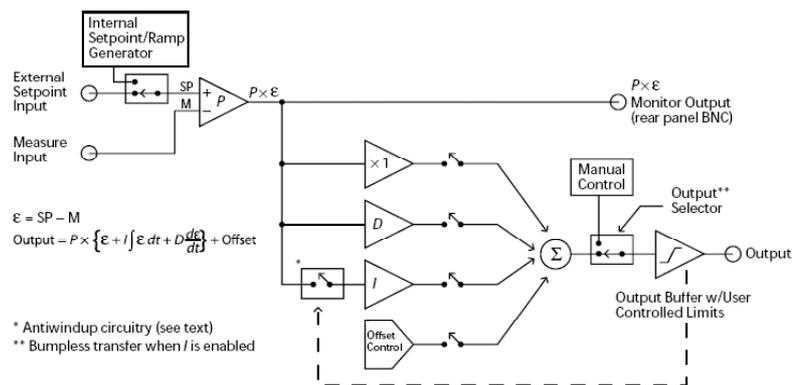
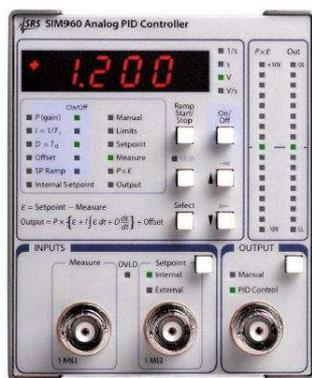


Figura 4.1: Stanford Research Systems, SIM 960, Analog PID Controller.

En un sistema de control se debe monitorear la variable de salida y luego compararla con algún valor deseado o predeterminado (set-point o punto de trabajo). El error resultante (diferencia entre la salida y el set-point) es usado continuamente para corregir la salida del sistema. A esta operación la hemos llamado lazo de control cerrado o simplemente *retro-alimentación*. El objetivo principal en un sistema de control no es sólo *controlar* la salida sino que *controlar con precisión* bajo cualquier condición. Es por ello que el control con retro-alimentación se ha hecho tan popular frente al control de lazo abierto, es decir, sin retro-alimentación. Este último no es capaz de controlar de manera tan precisa cuando el sistema es sometido a condiciones externas variables, o si existen fluctuaciones de los parámetros internos del sistema.

En este capítulo analizaremos en detalle las bases del control retroalimentado como se observa en la Figura 4.2 (a), donde la señal de salida del sistema es retroalimentada y comparada con la señal que representa el punto de trabajo del sistema.

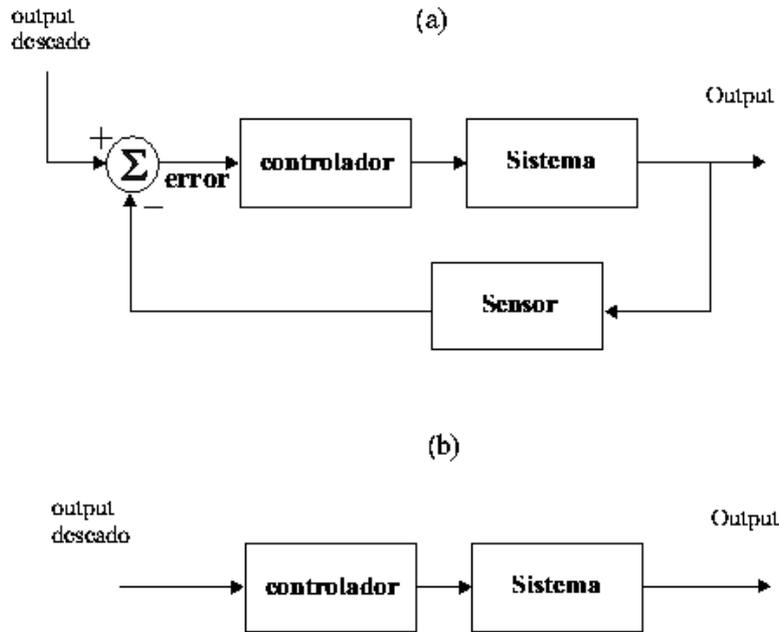


Figura 4.2: (a) Sistema de control con lazo cerrado (Feedback). (b) Sistema de control con lazo abierto

Este tipo de control es bastante más ventajoso que el control de lazo abierto, Figura 4.2 (b), donde no se realiza la retroalimentación, hecho que imposibilita la corrección del estado del sistema.

Para introducir los principios básicos de la retroalimentación, estudiaremos a continuación el caso de un motor de corriente continua.

4.1. Caso de Estudio: Motor DC

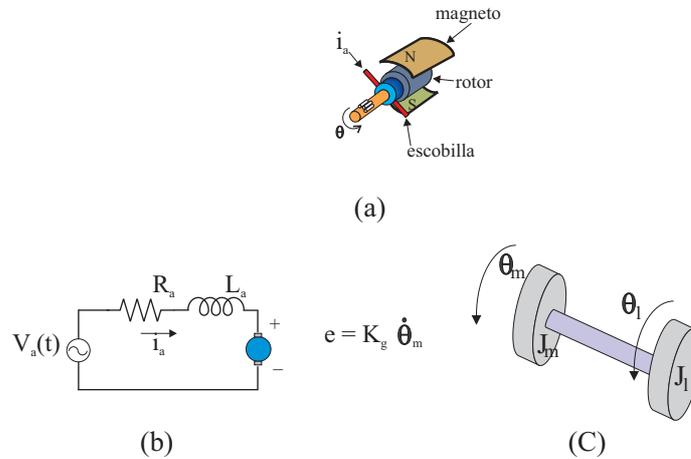


Figura 4.3: a) Esquema Motor DC. b) Circuito eléctrico. c) Diagrama mecánico

El motor DC de la figura 4.3 a) está gobernado por las leyes de la electrodinámica. Podemos calcular el torque en el rotor en términos de la corriente circulando en la armadura a través de una constante K_m (campo magnético generado por la circulación de una corriente en la armadura)

$$T = K_m i_a \quad \text{ecuación lineal}$$

Y con ello podemos expresar el voltage generado como resultado de la rotación (fem del generador) en términos de la velocidad de rotación $\dot{\theta}$ y una constante del generador K_g (fuerza electromotriz generada por desplazamiento del conductor donde fluye una corriente, fuerza de Lorentz)

$$e = K_g \dot{\theta}$$

Si usamos unidades coherentes, $K_g = K_s$. Si usamos estas relaciones podemos establecer las ecuaciones eléctricas (4.1) y mecánicas (4.2,4.3) para el motor DC de acuerdo a los diagramas de la figura 4.3 b,c).

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - K_g \dot{\theta} \quad (4.1)$$

$$J_m \ddot{\theta}_m + b(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) + K(\theta_m - \theta_l) = K_m i_a \quad (4.2)$$

$$J_l \ddot{\theta}_l + b(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_m) + K(\theta_m - \theta_l) = 0 \quad (4.3)$$

En el análisis mecánico, el rotor del motor (inercia J_m , ángulo θ_m) está conectado a la carga (inercia J_l , ángulo θ_l) a través del eje del motor que supusimos capaz de torcerse y los modelamos como un resorte de constante K con una constante de amortiguamiento b .

Supongamos que podemos despreciar en estas ecuaciones los términos de inductancia $Ld/dt = 0$ y que el eje es rígido $\theta_m = \theta_l$, y así simplificarlas,

$$J\dot{\Omega} + \frac{K_m K_g}{R_a} \Omega = \frac{K_m}{R_a} v_a + T_l$$

Podemos redefinir las constantes segun,

$$\begin{aligned} \tau &= JR_a/K_m K_g \\ K_0 &= 1/K_g \\ K_1 &= R_a/K_m \\ \Omega &= \dot{\theta}_m \end{aligned}$$

y la ecuación nos queda,

$$\tau\dot{\Omega} + \Omega = K_0(v_a + K_1 T_l) \quad (4.4)$$

Esta ecuación está expresada en el diagrama de bloque de la figura 4.4. El sensor es generalmente un tacómetro que mide la velocidad angular y genera un voltage de salida proporcional (lineal) a ésta. El controlador es un amplificador que entrega un voltage al motor que dependerá de los valores Ω_d y Ω , deseado y actual respectivamente.

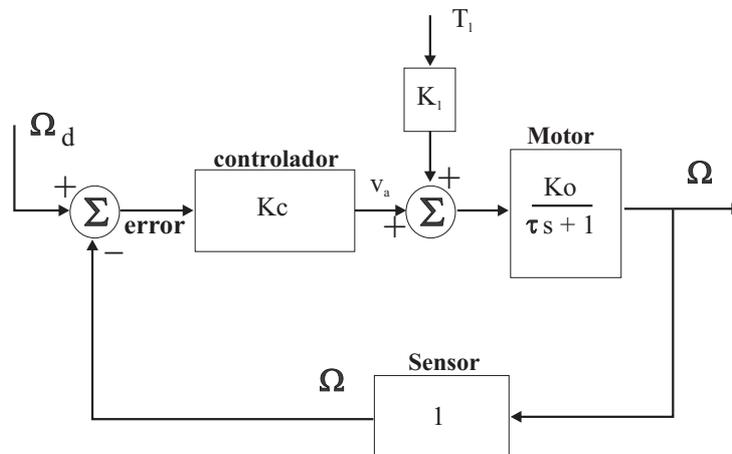


Figura 4.4: Diagrama de bloque del Motor DC con controlador

Comparemos el sistema con lazo de control abierto y con lazo de control cerrado.

lazo abierto

En el caso del lazo de control abierto, el voltage v_a es proporcional a la velocidad angular.

$$v_a = K_c \Omega_d \quad (4.5)$$

Además en régimen estacionario, $\dot{\Omega} = 0$ y sin torques $T_l = 0$, tenemos,

$$\Omega = K_0 v_a = \Omega_d$$

Con lo cual K_c debe ser obligatoriamente $K_c = K_0^{-1}$. Entonces se calcula o estima K_c y luego se impone $K_c = K_0^{-1}$.

lazo cerrado

En el caso del controlador en lazo cerrado,

$$v_a = K(\Omega_d - \Omega) \quad (4.6)$$

Donde K es la ganancia del controlador. Si combinamos esta ecuación con la ecuación 4.4, tenemos que,

$$\tau \dot{\Omega} + (1 + KK_0)\Omega = K_0(K\Omega_d + K_1 T_l) \quad (4.7)$$

Si el torque es zero $T_l = 0$, en régimen estacionario tenemos la velocidad angular,

$$\Omega = \frac{KK_0}{1 + KK_0} \Omega_d \quad (4.8)$$

Si elegimos la ganancia de feedback $KK_0 \gg 1$ entonces

$$\Omega \cong \Omega_d$$

Hasta aquí podemos ver que ambas técnicas nos entregan el resultado deseado. Por un lado el lazo abierto nos dá exactamente $\Omega = \Omega_d$, sin embargo el lazo cerrado nos dá asintóticamente $\Omega = \Omega_d$.

Donde está la diferencia ? → Cálculo de errores

Supongamos que la ganancia del motor K_0 fluctúa de acuerdo a $K_0 + \delta K_0$ (o simplemente no se conoce exactamente su valor).

En este caso, para el **lazo abierto**, debemos medir constantemente para ajustar K_c de manera que no exista error entre el valor deseado y la salida. En ecuaciones esto significa considerar,

$$\begin{aligned} \Omega &= K_0 v_a & v_a &= K_0^{-1} \Omega_d \\ \Omega &= (K_0 + \delta K_0) \frac{1}{K_0} \Omega_d = \left(1 + \frac{\delta K_0}{K_0}\right) \Omega_d \end{aligned}$$

El error en la velocidad angular será

$$\begin{aligned}\delta\Omega &= \frac{\delta K_0}{K_0}\Omega_d \\ \frac{\delta\Omega}{\Omega_d} &= 1\frac{\delta K_0}{K_0}\end{aligned}$$

Esto es, 10% de error en K_0 conduce a un 10% de error en Ω .

Ahora consideremos el controlador con **lazo cerrado**. Aplicando el mismo cambio en K_0 , es decir $K_0 \rightarrow K_0 + \delta K_0$ lo reemplazamos en la ecuación 4.8 y obtenemos

$$\Omega = \frac{(K_0 + \delta K_0)K}{1 + (K_0 + \delta K_0)K}\Omega_d$$

En términos de δK_0 ,

$$\Omega = \frac{[K_0K/(1 + K_0K)] + [K\delta K_0/(1 + KK_0)]}{1 + [K\delta K_0/(1 + KK_0)]}\Omega_d$$

Expandimos en Taylor en torno a 1:

$$\Omega \approx \left(\frac{K_0K}{1 + K_0K} + \frac{K\delta K_0}{1 + KK_0} \right) \left(1 - \frac{K\delta K_0}{1 + KK_0} \right) \Omega_d$$

Si ignoramos los términos de orden $O(2)$, y definimos, Ω' , la velocidad no perturbada (componente DC),

$$\Omega' = \frac{K_0K}{1 + K_0K}\Omega_d$$

$$\Omega \cong \Omega' + \Omega' \frac{1}{1 + KK_0} \frac{\delta K_0}{K_0}$$

Así

$$\begin{aligned}\delta\Omega' &= \Omega' \frac{1}{1 + KK_0} \frac{\delta K_0}{K_0} \\ \frac{\delta\Omega'}{\Omega'} &= \frac{1}{1 + KK_0} \frac{\delta K_0}{K_0}\end{aligned}\tag{4.9}$$

Vemos que un 10% de cambio en K_0 causará sólo un $1/(1 + KK_0) \times 10\%$ de cambio en la velocidad $\Omega' \cong \Omega_d$, el cual será muy pequeño si $KK_0 \gg 1$.

Esto que hemos hecho se puede resumir usando el cálculo diferencial.

Suponga que tiene una ganancia

$$T(K_0) = \frac{KK_0}{1 + KK_0}$$

Si hacemos una variación de primer orden

$$\begin{aligned} dT &= \frac{dT}{dK_0} \delta K_0 \\ \frac{\delta T}{T} &= \left(\frac{K_0}{T} \frac{dT}{dK_0} \right) \frac{\delta K_0}{K_0} \\ \frac{\delta T}{T} &= (\text{sensibilidad}) \frac{\delta K}{K_0} \end{aligned} \quad (4.10)$$

En el caso anterior la sensibilidad es simplemente $1/(1 + KK_0)$. Este es la ventaja mas relevante del control con lazo cerrado: El error es menos sensible a variaciones en los parámetros del sistema que en el caso del lazo abierto. Por lo tanto no es necesario conocer con mucha precisión las características del sistema para obtener un control preciso.

Consideremos ahora el efecto del torque de la carga, T_l . En el caso **lazo abierto**, las ecuaciones 4.4, 4.5 conducen a:

$$\Omega = K_0(K_c \Omega_d + K_1 T_l)$$

Con $K_c = K_0^{-1}$. Entonces,

$$\Omega = \Omega_d + K_0 K_1 T_l$$

y las variaciones de velocidad causadas por la carga son,

$$\delta \Omega = K_0 K_1 T_l$$

Así vemos que el error en la velocidad es proporcional a la perturbación de carga, e involucra los parámetros de diseño (K_1, K_0).

Por el contrario, en el caso del lazo cerrado, en régimen estacionario, a velocidad angular constante Ω_d y torque T_l , la ecuación 4.7 es,

$$\Omega = \frac{K_0 K}{1 + K_0 K} \Omega_d + \frac{K_0 K_1}{1 + K_0 K} T_l \quad (4.11)$$

Es posible entonces elegir K de manera que $K_0 K \gg 1$ y $K_0 K \gg K_0 K_1$, con lo cual el error será despreciable con o sin torque de carga.

Si comparamos los errores de ambos lazos debidos al torque,

$$\begin{aligned} \delta \Omega &= K_0 K_1 T_l && \text{lazo abierto} \\ \delta \Omega &= \frac{K_0 K_1}{1 + K_0 K} T_l && \text{lazo cerrado} \end{aligned}$$

Vemos que el error de velocidad del controlador con lazo cerrado es menor que el error del controlador de lazo abierto en una cantidad que es exactamente la ganancia de lazo del diagrama de bloque $1 + KK_0$.

Otra característica simpática del controlador con lazo cerrado es que la estabilidad del sistema puede ser mejorada. Si miramos la ecuación 4.7, vemos que los polos del sistema son

$$s = -\frac{1}{\tau}(1 + KK_0)$$

Con lo cual la constante de tiempo puede disminuir (gracias al factor $1 + KK_0$) si incrementamos la ganancia K . La respuesta será siempre más rápida si aumentamos la ganancia del sistema, sin embargo en sistemas de segundo orden esto puede traer problemas de inestabilidad y de amortiguamiento (settling time t_s muy lento).

4.2. Propiedades Generales de la Retro-Alimentación

Estas ideas sobre el control de velocidad del motor son aplicables a cualquier sistema de control.

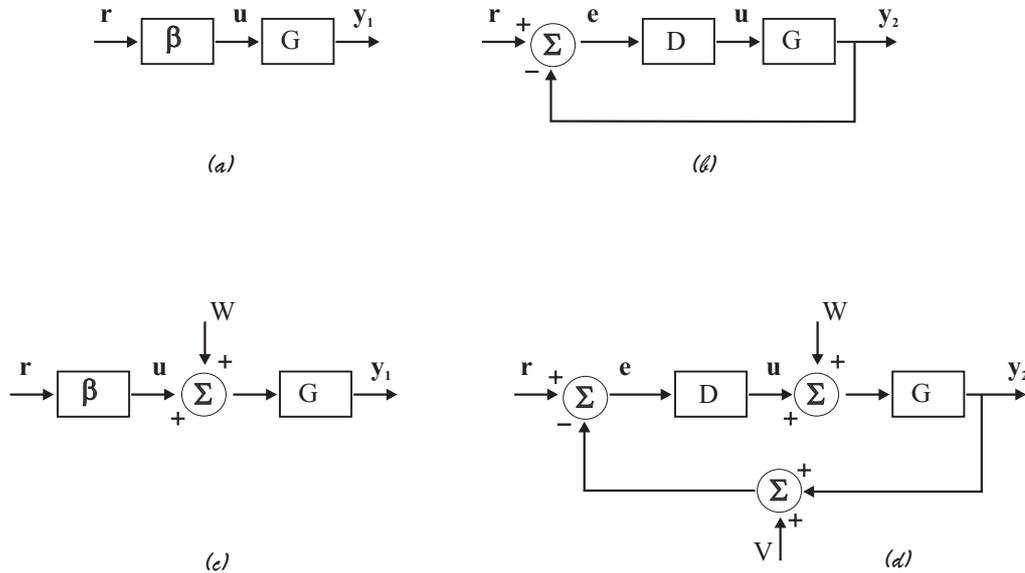


Figura 4.5: Sistemas de control abierto (a,c) y cerrado (b,d). Se agrega una perturbación W y un ruido o error en el sensor V en el caso de lazo cerrado

Consideremos el sistema de la figura 4.5 a,b). Las salidas de ambos sistemas son:

$$Y_1(s) = G(s)\beta(s)R(s) \tag{4.12}$$

$$Y_2(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)}R(s) \tag{4.13}$$

Cualquier cambio en β o G en el caso lazo abierto va a causar errores proporcionales en y_1 . En el caso lazo cerrado, cambios en D o G van a ser *atenuados* si $|DG| > 1$.

De hecho, si $|DG| \gg 1$, y_2 será independiente de D, G , disminuyendo absolutamente la sensibilidad. Agreguemos perturbaciones W y posibles errores en el sensor V . La topología será ahora la de la figura 4.5 c,d).

La respuesta para el lazo abierto y cerrado serán (sin considerar V):

$$Y_1(s) = G(s)\beta(s)R(s) + \underbrace{G(s)W(s)}_{\text{Respuesta}} \tag{4.14}$$

$$Y_2(s) = \frac{G(s)D(s)}{1 + G(s)D(s)}R(s) + \underbrace{\frac{G(s)}{1 + D(s)G(s)}W(s)}_{\text{Respuesta}} \tag{4.15}$$

El ingeniero no tiene posibilidad de influenciar el efecto de las perturbaciones en el lazo abierto. Pero en el caso lazo cerrado, bastará hacer $|D|$ muy grande para que la respuesta y_2 a las perturbaciones W sea reducida considerablemente.

El efecto del error V en el lazo cerrado es (sin considerar W)

$$Y_2(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)}[R(s) - V(s)]$$

Vemos que el error aparece con la misma función de transferencia que posee la entrada R . Esto indica que es *imposible* atenuar el efecto del ruido sin intervenir el control del sistema.

En general se usaran sensores cuyo ruido esté ubicado en una banda de frecuencias mucho mas grande que las raíces del sistema, para poder filtrarlo sin afectar la dinámica del controlador.

4.3. Tipos de Retro-Alimentación

Existen 3 tipos de retro-alimentación (RA). Proporcional (P), Integral (I) y Derivativa (D). Sus nombres provienen de la operación matemática que efectúa el controlador sobre una determinada variable de error (e).

4.3.1. RA Proporcional (P)

La salida del controlador u es proporcional al error e ,

$$u = K_p e$$

Este es el caso del controlador de velocidad del motor DC que vimos anteriormente, y el controlador en la figura 4.5 b) es $K_p = D(s)$.

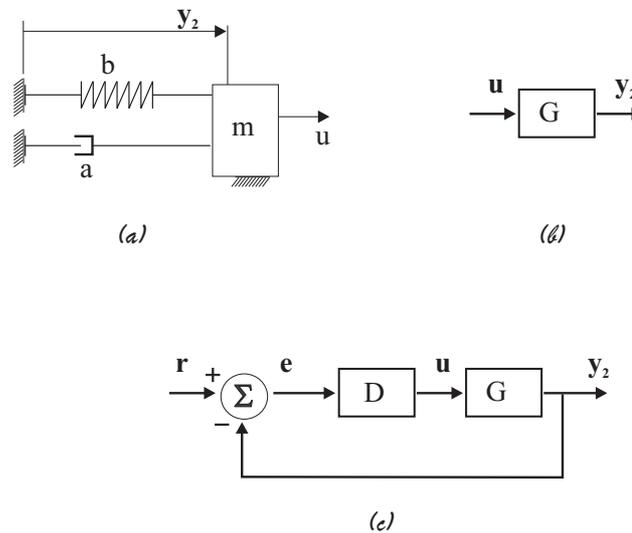


Figura 4.6: a) Sistema de Segundo orden y (b) su diagrama de bloque. c) Diagrama de bloque con controlador proporcional.

Consideremos el sistema de segundo orden de la figura 4.6 a,b), que tiene una ganancia $G(s)$ dada por,

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

Si le agregamos un controlador proporcional, el diagrama de bloque se transforma en el de la figura 4.6 c). Para este diagrama donde r es la señal de referencia ($D(s) = K_p$) tenemos,

$$r - y = e$$

$$\begin{aligned}
 u &= eD \\
 y &= uG = eDG = (r - y)DG \Rightarrow \\
 \frac{y}{r} &= \frac{DG}{1 + DG} = \frac{K_p}{s^2 + as + b + K_p}
 \end{aligned}$$

El denominador nos entrega los polos de la función de transferencia con retro-alimentación proporcional. Aquí el resorte se encarga *naturalmente* de llevar la masa a la posición de equilibrio. Consideremos que no hay resorte ($b = 0$), de manera que es el controlador quién se encargará de mantener la posición de la masa.

Si $b = 0$, las raíces de $s^2 + as + b + K_p$ son

$$s = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - K_p}$$

Si K_p aumenta ($0 < K_p < \frac{a^2}{4}$) la constante de tiempo del sistema decrece (polos hacia la izquierda). Si $K_p > \frac{a^2}{4}$ la parte real de las raíces no cambia con K_p pero la parte imaginaria crece (ω_n). Con lo cuál el t_r (rise time) decrece $t_r \propto \omega_n^{-1}$.

Si consideramos sistemas de orden superior, para K_p muy grande se pueden originar inestabilidades, es decir al menos un polo $p = \sigma + j\omega$ tendrá parte real positiva $\sigma > 0$. En general la retro-alimentación proporcional aumenta la velocidad con la cual el error tiende a zero. En algunos casos lo va a eliminar completamente. Como vimos anteriormente K_p aumenta la magnitud de DG y DG reducía el error del sistema.

4.3.2. RA Integral (I)

En el caso de la RA integral, la salida del controlador es proporcional a la integral del error e , y tiene la forma

$$u(t) = \frac{K_p}{T_I} \int_{t_0}^t e dt$$

Con lo cuál el controlador es,

$$D(s) = \frac{K_p}{T_I s}$$

T_I es una constante de tiempo llamada tiempo integral (o de reset). La ganancia del controlador es K_p/T_I . Este tipo de controlador va a entregar un valor finito de u incluso si no hay error e . Esto porque u es una función de los valores pasados de e . Estos se acumularan en el integrador (Σ) incluso si el error actual se hace zero.

Esto hace más insensible el sistema frente a perturbaciones W . Si el sistema llega a tener error zero y aparece una perturbación W , el error residual va a ser utilizado para contrarestarla.

La razón principal de una RA Integral es eliminar errores en régimen estacionario, pero lamentablemente se va a reducir la estabilidad del sistema.

En el ejemplo del motor DC, cambiemos el controlador proporcional por uno integral.

$$V_a(s) = \frac{K_p}{T_I s} (\Omega_d - \Omega)$$

La ecuación diferencial del motor (con $T_l = 0$) efectuando la TL , nos entrega una ecuación característica del denominador de la función de transferencia

$$\tau s^2 + s + \frac{K_o K_p}{T_I} = 0$$

Si incrementamos la *Ganancia del Controlador* K_p/T_I , obtenemos raíces de tiempo de decaimiento más grande (relajan más lentamente). Con lo cuál el sistema es menos estable. Aunque para el motor DC las raíces están siempre en el lado negativo del eje $Re(s)$, veremos que en general agregar una RA integral va a reducir la estabilidad del sistema, cualquiera sea éste.

4.3.3. RA Derivativa (D)

Aquí la salida del controlador es proporcional a la derivada del error e , y tiene la forma

$$u(t) = K_p T_D \frac{de}{dt}$$

Aquí $D(s) = K_p T_D s$. T_D es el tiempo de derivación. Este controlador es usado generalmente en conjunto con uno integral o proporcional para incrementar el decaimiento de las raíces y así mejorar

la estabilidad del sistema. Este controlador no llevará jamás el error a cero. Para ellos debemos usar los otros controladores.

En el sistema de segundo orden de la figura 4.6 sin resorte, la ecuación característica es :

$$s^2 + (a + K_p T_D)s = 0$$

Y sus raíces son

$$s = 0, -(a + K_p T_D)$$

La raíz $s = 0$ permanece ahí independiente del valor de $K_p T_D$ y quiere decir que cualquier condición inicial sobre la posición y_2 no podrá ser llevada hacia el valor deseado o referencia. Sin embargo, este controlador afecta la tasa a la cuál \dot{y}_2 tiende a zero. Recuerde que la salida del controlador u es proporcional a la derivada del error.

4.3.4. Retro-alimentación PID

Este tipo de retro-alimentación considera la acción simultánea (suma) de las tres RA anteriores. Si calculamos la transformada de Laplace de un controlador PID, tenemos:

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) e(s) \quad (4.16)$$

Con lo cuál

$$D(s) = K_p \frac{T_D s^2 + s + (1/T_I)}{s}$$

La combinación de los tres tipos de controlador provee una reducción aceptable del error y, al mismo tiempo, una estabilidad y amortiguamiento aceptables. Los controladores comerciales tienen típicamente la forma de la ecuación anterior. El ingeniero debe sólo ajustar los coeficientes (las tres constantes) basándose en los supuestos siguientes:

1. Incrementar $[K_p, T_I^{-1}] \rightarrow$ Reduce los errores del sistema
2. Incrementar $[T_I^{-1}] \rightarrow$ Reduce la Estabilidad
3. Incrementar $[T_D] \rightarrow$ Mejora la Estabilidad

En la figura 4.7 se aprecia la evolución del error como respuesta a una perturbación unitaria tipo delta de Dirac (ver ecuación 4.15) usando los tres tipos de controladores, P , PD y PID . Observe que la ventaja de utilizar un controlador PID es reducir el error a cero. Sin embargo hemos aumentado el orden de la polinomial del denominador de la función de transferencia.

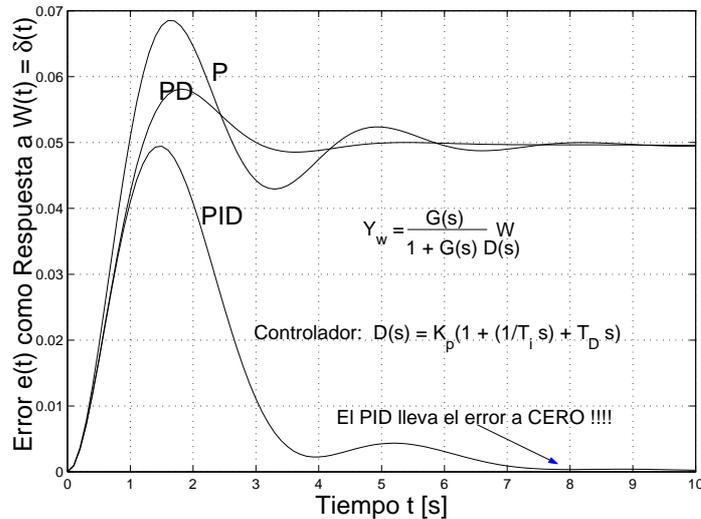


Figura 4.7: Respuesta de un sistema de Segundo Orden $G(s) = 1/[(s+1)(5s+1)]$ a una perturbación unitaria $W(t) = \delta(t)$

Reset de un Integrador

Los actuadores comandados por un controlador tienen siempre un rango de operación limitado, como por ejemplo una válvula: ésta puede estar completamente cerrada o abierta, con lo cual el caudal de líquido no puede disminuir ni aumentar más allá de lo permitido por ella. Si se usa una RA integral, puede ocurrir que frente a un set point o referencia muy grande (brusca) el integrador entregue una salida muy grande que hará saturar al actuador, resultando Overshoots muy grandes.

La idea es que si uno impone una referencia brusca muy grande el actuador puede saturar. Supongamos que es así, y el actuador satura con un valor $\pm u_{max}$ (Figura 4.8 a). El integrador continúa integrando el error e y su señal de salida u_c sigue creciendo, porque el error permanece ya que si el actuador está saturado la salida del sistema *planta* sigue fija (no cambia). En este caso el integrador no está llevando la salida al valor de referencia con lo cual se le debe *resetear* o apagar para que el actuador salga de la saturación. Este reset puede realizarse en forma manual (switch) o en forma automática.

Esto se logra agregando un lazo de control *No Lineal* sobre el integrador. En la figura 4.8 b) tenemos un controlador tipo PI, es decir un bloque K_p y un bloque integrador $K_p/T_I s$. El lazo de control no lineal sobre el integrador se activa cuando el actuador se satura: entonces este lazo lleva el error e_1 a cero. Si la salida del actuador es $u_{min} < |u_a| < u_{max}$ el lazo no hace nada y $e_1 = e$. Cuando $u_{min} > |u_a| > u_{max}$ la región lineal de pendiente k de este lazo va a llevar el error que percibe el

integrador a cero de manera que el actuador salga de la saturación. En ese sentido la pendiente k va a determinar cuan rápido el lazo no lineal es capaz de seguir el error e para mantener fuera de saturación al actuador. (Figura 4.8 b).

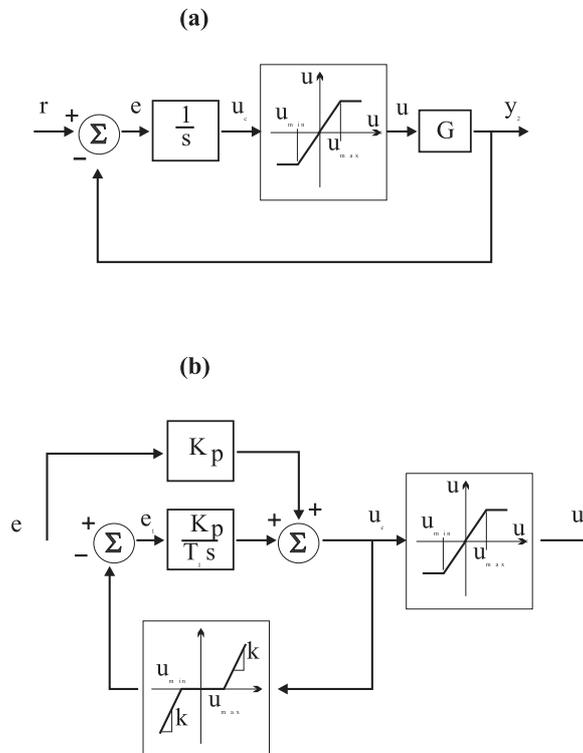


Figura 4.8: (a) Retro-Alimentación con Actuador que Satura. b) Reset del Controlador integral

4.3.5. Ajuste de un controlador PID

Ziegler and Nichols desarrollaron métodos para ajustar un controlador PID en los años 40 basados en ensayos de lazo abierto y cerrado.

Ajuste en lazo abierto

Ziegler and Nichols reconocieron que la mayoría muchos sistemas (plantas) responden al escalón unitario con una curva de respuesta característica (Figura 4.9 a). Esta puede ser generada experimentalmente o simulada a través de los parámetros del proceso. La forma de la curva es universal en sistemas de orden superior y puede ser aproximada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-\tau_d s}}{\tau s + 1}$$

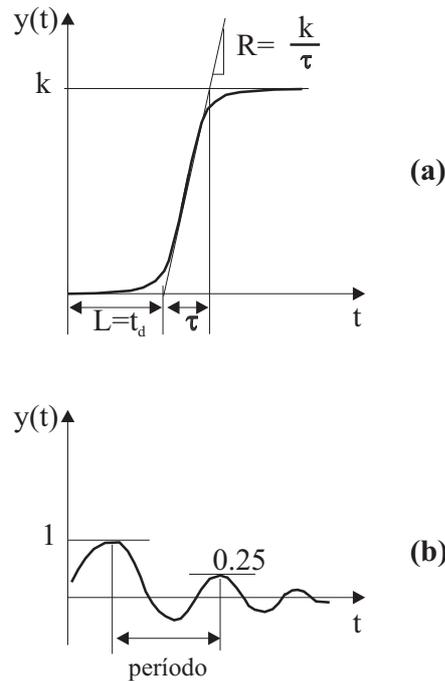


Figura 4.9: a) Curva característica de respuesta tipo S b) Caída de amplitud de 1/4 en un período.

que es simplemente una función de primer orden con un retardo (lag). Las constantes se determinan a partir de la **respuesta al escalón** de la planta. La tangente en el punto de inflexión entrega una pendiente $T = K/\tau$. La intersección de la tangente con el eje temporal entrega el retardo $L = t_d$. Si la planta no presenta una salida similar a ésta, entonces se le pueden agregar otros polos para ajustarla a esta curva universal.

Procedimiento: (1) Excitar la planta con un escalón unitario, (2) Registrar la salida y determinar los parámetros del proceso, es decir, la ganancia del proceso k , el tiempo muerto o retardo t_d , la constante de tiempo τ , luego calcular L, R y de acuerdo a la tabla siguiente imponer los parámetros del controlador PID cuya función es:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (4.17)$$

Controlador	Ganancia Optima
P	$K_p = \frac{1}{RL}$
PI	$K_p = \frac{0,9}{RL}, T_I = \frac{L}{0,3}$
PID	$K_p = \frac{1,2}{RL}, T_I = 2L, T_D = 0,5L$

Los parámetros fueron obtenidos por ellos a partir de una razón de decaimiento para la respuesta $y(t)$ de 0,25. La respuesta cae a un cuarto de su amplitud máxima inicial luego de un período de oscilación (Figura 4.9 b). Esto corresponde a un parámetro de amortiguamiento de $\zeta = 0,21$ es decir $e^{-\zeta\omega_n T} = 0,25$ con $T = 2\pi/\omega_n$.

Ajuste en lazo cerrado

Este criterio (el más usado) para ajustar los parámetros del PID se basa en la evaluación de los *límites de estabilidad* del sistema. La ganancia proporcional K_p se aumenta hasta que aparecen oscilaciones (sistema marginalmente estable). Se determina así la ganancia última K_u y el período último P_u observando la salida del sistema.

Procedimiento: (1) Desconectar el derivador e integrador de manera de tener una acción proporcional pura. (2) Excitar el sistema retroalimentado con un escalón de referencia (ER) y registrar la salida. (3) Repetir el test ER incrementando/reduciendo la ganancia K_p hasta que aparece una oscilación estable en la salida. Esta es la ganancia K_u del sistema o ganancia límite de estabilidad. Luego se registra el período de la oscilación en la salida P_u del sistema. Estos dos valores luego se usan para calcular los parámetros óptimos del PID como aparece en la tabla siguiente.

Controlador	Ganancia Optima
P	$K_p = 0,5K_u$
PI	$K_p = 0,45K_u, T_I = P_u/1,2$
PID	$K_p = 0,6K_u, T_I = P_u/2, T_D = P_u/8$

Evidentemente en la práctica será necesario afinar *a la mano* los parámetros para ajustarse finalmente a las condiciones particulares de cada sistema.

4.4. Estabilidad

Un sistema es estable si su respuesta a tiempos grandes ($t \rightarrow \infty$) es acotada. Esto quiere decir que si el sistema es sometido a una perturbación en un momento dado, éste tiende a volver a su estado inicial. Esta definición es perfectamente válida para sistemas lineales. La respuesta estable de tales sistemas es amortiguada.

Este es el problema más importante en teoría de control lineal. Dijimos que la estabilidad de un sistema de control de lazo cerrado se satisface si todos los polos se ubican en el lado izquierdo del plano- s .

Aquí veremos conceptos de estabilidad de sistemas lineales, más tarde revisaremos los conceptos de estabilidad de Nyquist (respuesta en frecuencia) y Lyapunov.

4.4.1. Estabilidad BIBO

Un sistema es estable (bounded-input bounded-output) si para cada entrada acotada habrá una salida acotada también (sin importar lo que ocurre al interior).

Un test para esta propiedad se desprende del teorema de convolución que vimos en el capítulo I. Si el sistema enfrenta una entrada $u(t)$, y salida $y(t)$, con respuesta impulsional $h(t)$, entonces

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

Si $u(t)$ es acotada, entonces hay una constante M tal que $|u| \leq M < \infty$, y la salida será acotada por

$$\begin{aligned} |y| &= \left| \int h u d\tau \right| \\ &\leq \int |h||u|d\tau \quad \text{Schwarz} \\ &\leq M \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau}_A \end{aligned}$$

La salida será acotada si la integral A es acotada. Por otro lado, supongamos que la integral **no** es acotada, y consideramos una entrada acotada $u(t - \tau) = +1$ si $h(\tau) > 0$, y $u(t - \tau) = -1$ si $h(\tau) < 0$. En este caso

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_0^{\infty} d\tau$$

Que no es acotado.

Basta que la respuesta impulsional del sistema $h(t)$ sea constante, para que el sistema no sea estable BIBO. En estricto rigor, el sistema será acotado si los polos se encuentran en el lado izquierdo del plano- s (excluido el eje imaginario).

4.4.2. Criterio de estabilidad de Routh

El criterio de Routh (1874) permite determinar el número de polos de lazo cerrado que caen en el lado derecho del plano- s sin tener que factorizar los polinomios $Nu(s), Den(s)$ para encontrar los polos.

Considere la ecuación característica polinomial monic, con coeficiente de la potencia más alta = 1

$$a(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n \quad (4.18)$$

1. Condición **necesaria** para estabilidad: todas las raíces de 4.18 tengan parte real $< 0 \Rightarrow$ que todos los $a_i > 0$. Si un coeficiente = 0 (falta) o es negativo, el sistema tendrá polos ubicados en el lado derecho del plano- s .
2. Condición **necesaria y suficiente** para estabilidad: Todos los elementos de la primera columna de la matriz de Routh > 0 .

Para determinar la matriz de Routh procedemos como sigue: Primero creamos la primera y segunda fila de la matriz con los coeficientes de la ec. característica. Partiendo con el coeficiente de la potencia más alta (s^n) que es 1. Completamos esa fila con los coeficientes restantes saltándonos uno cada vez. La segunda fila comienza con el segundo coeficiente, correspondiente a la potencia siguiente (s^{n-1}). Completamos con los coeficientes no usados en la primera fila. Las demas filas se construyen con los determinantes normalizados (de signo cambiado).

$$\begin{array}{l} s^n \quad : 1 \quad a_2 \quad a_4 \quad \dots \\ s^{n-1} : a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \dots \\ s^{n-2} : b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \\ s^{n-3} : c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \\ \\ s^2 \quad : * \quad * \quad * \quad * \\ s^1 \quad : * \quad * \quad * \quad * \\ s^0 \quad : a_n \end{array}$$

donde

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} \det \begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_1} \det \begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = -\frac{1}{a_1} \det \begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$c_3 = -\frac{1}{b_1} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}$$

Veamos un ejemplo para construir la matriz de Routh. Consideremos la ecuación característica

$$a(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

Todos los $a_i > 0$ y distintos de 0. Para formar la matriz de Routh colocamos una primera fila partiendo con el primer coeficiente de $a(s)$ ($= 1$) seguido por los a_i pares. La segunda fila comienza con el segundo coeficiente de $a(s)$ (a_1) seguido por los coeficientes impares. Las siguientes filas son completadas calculando los determinantes entre la primera columna y las siguientes. Hasta completar s^0 .

El número de raíces en el lado derecho del plano- s es igual al número de cambios de signo en la primera columna. Un $+, -, + \rightarrow$ dos cambios de signo con lo cual dos raíces en RHP. Para nuestra ecuación característica, la matriz es:

$$\begin{array}{l} s^6 : \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 4 \\ s^5 : \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad 0 \\ s^4 : \quad \quad \quad \frac{5}{2} = \frac{(4)(3)-(1)(2)}{4} \quad \quad 0 = \frac{(4)(1)-(4)(1)}{4} \quad \quad 4 = \frac{(4)(4)-(1)(0)}{4} \\ s^3 : \quad \quad \quad 2 = \frac{(5/2)(2)-(4)(0)}{5/2} \quad \quad -\frac{12}{5} = \frac{(5/2)(4)-(4)(4)}{5/2} \quad \quad \quad 0 \\ s^2 : \quad \quad \quad 3 = \frac{(2)(0)-(5/2)(-12/5)}{2} \quad \quad 4 = \frac{(2)(4)-(5/2)(0)}{2} \\ s^1 : \quad \quad \quad -\frac{76}{15} = \frac{(3)(-12/5)-(8)}{3} \quad \quad \quad \quad \quad 0 \\ s^0 : \quad \quad \quad 4 = \frac{(-76/15)(4)-0}{-76/15} \end{array}$$

Se ve que la polinomial tiene raíces en el lado derecho del plano- s , ya que no todos los elementos de la primera columna son positivos. Hay dos polos en RHP porque hay dos cambios de signo. Note que el último elemento no nulo en cada fila es a_n .

Si el primer término en una de las filas es $= 0$ o si la fila entera es $= 0$, la matriz estándar de Routh no se puede formar, y debemos usar una técnica especial.

Casos Especiales

Si sólo el primer elemento en una fila es cero, reemplazamos ese *cero* por $\epsilon > 0$ y efectuamos los mismos pasos que vimos anteriormente. Luego aplicamos nuestro criterio de estabilidad tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Veamos un ejemplo.

$$a(s) = s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 5s + 6$$

La matriz de Routh es la sgte:

$$\begin{array}{rcccc} s^4 : & 1 & & 7 & 6 \\ s^3 : & 5 & & 5 & \\ s^2 : & 6 = \frac{(5)(7)-(5)}{5} & 6 = \frac{(5)(6)-(0)}{5} & & \\ s^1 : & \epsilon & & & \\ s^0 : & 6 & & & \end{array}$$

Si $\epsilon > 0$ no hay cambio de signo (estable). Si $\epsilon < 0$ hay 2 cambios de signo (dos raíces en el lado derecho del plano $-s$). Entonces si $\epsilon = 0$, esto indica que hay dos raíces imaginarias puras, y una perturbación pequeña va a enviarlas ya sea al lado izquierdo o derecho del plano $-s$.

Existe una alternativa, y es incluir la variable auxiliar $z = 1/s$ y así convertir la ec. característica en términos de z . Esto produce en general una matriz de Routh con los elementos de la primera columna distintos de cero.

Otro caso especial ocurre cuando una fila entera es cero. Esto indica que hay pares de raíces complejo conjugado. Si la fila i -ésima es cero, se debe formar una ecuación auxiliar con la primera fila previa distinta de cero.:

$$a_1(s) = \beta_1 s^{i+1} + \beta_2 s^{i-1} + \beta_3 s^{i-3} + \dots$$

donde β_i es el coeficiente de la fila $(i - 1)$.

Luego reemplazamos la i -ésima fila con los coeficientes de la *derivada* de esta polinomial auxiliar y completamos la matriz de Routh. Ojo que las raíces de la polinomial auxiliar son también raíces de la ec. característica original, por lo tanto deben ser tratadas separadamente. Veamos un ejemplo: Consideremos la polinomial:

$$a(s) = s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 12s^2 + 11s + 6$$

La matriz de Routh es:

$$\begin{array}{rcl}
 s^5 : & 1 & 12 & 11 \\
 s^4 : & 6 & 12 & 6 \\
 s^3 : & 10 & 10 & 0 \\
 s^2 : & 6 & 6 & 0 \\
 s^1 : & 0 & 0 & \rightarrow a_1(s) = 6s^2 + 6 \\
 s^1 : & 12 & 0 & \leftarrow \frac{da_1(s)}{ds} = 12s \\
 s^0 : & 6 & &
 \end{array}$$

Vemos que no hay cambios de signo en la primera columna, por lo tanto todas las raíces tienen parte real < 0 , excepto por un par de raíces complejo conjugado de la polinomial auxiliar:

$$a_1(s) = 6s^2 + 6 \rightarrow s = \pm j$$

El método de Routh es muy útil para determinar el rango de parámetros para el cual un sistema retro-alimentado sigue siendo estable. Considere el sistema de la figura sgte:

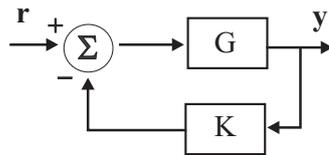


Figura 4.10: Sistema Retro-Alimentado

La estabilidad del sistema depende de la ganancia K ($K > 0$). La ecuación característica es $1 + KG(s) = 0$ con $G(s)$ dado por:

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{s(s - 1)(s + 6)}$$

con lo cual tenemos que:

$$a(s) = s^3 + 5s^2 + (K - 6)s + K$$

Ud. puede notar que al aplicar la condición necesaria de Routh a esta ecuación, se limita el rango de valores de K para los cuales el sistema es estable: $K > 6$.

Si construimos la matriz de Routh, podemos afinar aún más la condición para K :

$$\begin{array}{rcl}
 s^3 : & 1 & (K - 6) \\
 s^2 : & 5 & K \\
 s^1 : & \frac{5(K-6)-K}{5} & 0 \\
 s^0 : & K &
 \end{array}$$

El sistema permanecerá estable si no hay cambio de signo en la primera columna. Si ya $K > 0$ entonces basta asegurar que

$$\frac{5(K - 6) - K}{5} > 0$$

con lo cual $K > 7,5$.

Capítulo 7

Bibliografía

Bibliografía

- [1] Coughanor, D.R., & L.B. Koppell, Process Systems Analysis and Control, McGraw-Hill, New York, 1965
 - [2] Denn, M.M., Process Modelling, Longman, New York & London, 1986
 - [3] Franks, R.G.E., Modelling, and Simulation in Chemical Engineering, John Wiley & Sons Inc., New York, 1972
 - [4] Gould, L.A., Chemical Process Control: theory and Applications, Addison-Wesley, 1969
 - [5] Luyben, W.L., Process Modelling, Simulation, and Control for Chemical Engineers, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokio, 1973
 - [6] A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw Hill, New York, 1965
 - [7] Capítulo 1: Introduction to Modern Control Theory, in: F.L. Lewis, Applied Optimal Control and Estimation, Prentice-Hall, 1992.
-