

CONDUCCION PERMANENTE EN DOS DIRECCIONES

Formulación

En problemas multidimensionales, la ecuación del calor no se puede reducir a ecuación diferencial ordinaria.

La ecuación del calor para el campo escalar bidimensional $T(x, y)$

- ✓ en una región rectangular,
- ✓ en régimen permanente,
- ✓ sin generación interna de calor es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Existen dos componentes de flujo de calor, que son

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

¿Como resolvemos estos problemas?

Existen diversos métodos, analíticos y numéricos. Por ejemplo, un problema con solución analítica es el de una aleta rectangular con extremo adiabático en $x = L$. El semi-espesor de la aleta es e , tal que $b = 2e$.

El problema se puede formular en dos dimensiones si se ignora el gradiente de temperatura en la dirección lateral (z).

Removiendo la suposición de temperatura uniforme en la dirección vertical, la ecuación diferencial del problema es (1), y las condiciones de borde son:

$$T(0, y) = T_1, \quad \frac{\partial T(L, y)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad -k \frac{\partial T(x, e)}{\partial y} = h(T(x, e) - T_o)$$

Para homogenizar el sistema usamos la variable de temperatura $\Theta = T - T_o$, con lo cual el sistema es:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0; \quad \Theta(0, y) = \Theta_1 = T_1 - T_o, \quad \frac{\partial \Theta(L, y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Theta(x,0)}{\partial y} = 0, \quad -k \frac{\partial \Theta(x,e)}{\partial y} = h\Theta(x,e)$$

Este sistema se puede resolver por el método de separación de variables.

Sea: $\Theta(x, y) = X(x)Y(y)$

Reemplazando esto en la ecuación diferencial y arreglando:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \pm \lambda^2$$

Se elige el signo apropiado para que el problema arroje soluciones periódicas en la dirección Y, y exponenciales en la dirección X, lo cual está de acuerdo con lo encontrado en el análisis elemental de aletas:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad -k \frac{dY(e)}{dy} = hY(e) \quad (2)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \quad \frac{dX(L)}{dx} = 0 \quad (3)$$

La segunda ecuación diferencial tiene una sola condición ya que no se puede imponer la condición de temperatura en la base de la aleta a las variables separadas.

A partir de la ecuación (2), las soluciones son un conjunto infinito de funciones sinusoidales. La primera condición de borde indica que esas funciones son cosenos:

$$Y_n(y) = C_n \cos(\lambda_n y)$$

Usando la segunda condición de borde (mixta), se obtiene la ecuación característica:

$$\tan(\lambda_n e) = \frac{Bi}{\lambda_n e}, \quad (4); \quad Bi = \frac{he}{k}$$

Bi es el llamado “número de Biot”. La dependencia de la temperatura del espesor está fijada por este grupo adimensional. Las soluciones de esa ecuación característica se encuentran tabuladas en diversos libros de transferencia de calor.

Ej: $e=0.002$ m, $h=10$ W/m² K, $k=20$ W/m K,
Bi=0,001

Los cuatro primeros valores característicos son:

0,0316 4,1419 6,2833 9,4249

Hay que notar que los valores característicos son $\lambda_n e$

Las soluciones de la ecuación (3), considerando que el problema es semejante al de la aleta de largo finito, en versión unidimensional, son:

$$X_n(x) = B_n (\cosh(\lambda_n x) - \tanh(\lambda_n L) \sinh(\lambda_n x))$$

La solución-producto para la temperatura se expresa así:

$$\Theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cosh(\lambda_n x) - \tanh(\lambda_n L) \sinh(\lambda_n x)) \cos(\lambda_n y)$$

Usando ahora la condición no homogénea en $x=0$,

$$\Theta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n y)$$

Los coeficientes de esta serie se determinan como los de la expansión de una función (en este caso una constante) en serie de Fourier:

$$a_n = \frac{\int_0^e \Theta_1 \cos(\lambda_n x) dx}{\int_0^e \cos^2(\lambda_n x) dx} = \frac{2\Theta_1 \sin \lambda_n e}{\lambda_n e + \sin \lambda_n e \cos \lambda_n e}$$

Y finalmente

$$T(x, y) - T_o = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Theta_1 \sin \lambda_n e}{\lambda_n e + \sin \lambda_n e \cos \lambda_n e} (\cosh \lambda_n x - \tanh \lambda_n L \sinh \lambda_n x) \cos \lambda_n y$$

Para evaluar esta serie (un valor para cada punto) es necesario determinar los valores característicos $\lambda_n e$ (ecuación 4), uno para cada término. Esos valores, afortunadamente, valen para cada punto en que se desee evaluar la temperatura, o los flujos de calor derivados.

Igualmente se puede obtener de esta expresión el flujo de calor en una determinada dirección, con la ley de Fourier.

Por ejemplo el calor local (para cada x) disipado por la cara superior de la aleta es:

$$q(x) = -k \frac{dT}{dy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k\lambda_n \Theta_1 \sin^2 \lambda_n e}{\lambda_n e + \sin \lambda_n e \cos \lambda_n e} (\cosh \lambda_n x - \tanh \lambda_n L \sinh \lambda_n x)$$

El calor total disipado por la aleta, en base al resultado anterior (por unidad de ancho) será:

$$Q = 2 \int_0^L q(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k\lambda_n \Theta_1 \sin^2 \lambda_n e}{\lambda_n (\lambda_n e + \sin \lambda_n e \cos \lambda_n e)} (\sinh \lambda_n L - \tanh \lambda_n L (\cosh \lambda_n L - 1))$$

Por lo tanto:

$$Q = 2 \int_0^L q(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k\Theta_1 \sin^2 \lambda_n e}{(\lambda_n e + \sin \lambda_n e \cos \lambda_n e)} \tanh \lambda_n L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k\Theta_1 \sin^2 \lambda_n e}{(\lambda_n e + \sin \lambda_n e \cos \lambda_n e)} \tanh(\lambda_n e \frac{L}{e})$$

Una evaluación integrando el flujo de calor local en $x=0$, conduce al mismo resultado.

Resumen:

La solución para el campo de temperatura bidimensional permite evaluar flujo de calor local (o puntual). Estos deben ser integrados para obtener los flujos totales que atraviesan diversas superficies.

SOLUCION POR METODOS NUMERICOS: DIFERENCIAS FINITAS.

No todos los problemas tienen solución analítica. En el caso anterior, esta era posible porque solo había una condición de borde no homogénea.

Las soluciones numéricas se pueden obtener en un mayor número de problemas.

Consideremos una región que representa la sección transversal de un ducto rectangular de pared gruesa. Se impone una temperatura en la pared interna, y otra en la externa.

Se discretiza la región definiendo dos conjuntos de líneas paralelas a los ejes coordenados. Las intersecciones de estas líneas son nodos. Consideraremos nodos equiespaciados y pasos de malla iguales en las dos direcciones $\Delta X = \Delta Y$.

Se elige el paso de malla de modo de contar con suficientes nodos en ambas direcciones.

Sea m el número de nodos en dirección Y , n en dirección X . En el ejemplo, $m = n = 61$.

El paso de malla queda entonces $\Delta Y = 1/(m-1)$

Los lados exteriores son de largo unitario (1 m).

Discretización de la región

Cada nodo tiene los índices i, j (axial y transversal respectivamente). Las coordenadas del nodo genérico (i, j) son:

$$X = (i-1) \Delta X$$

$$Y = (j-1) \Delta Y$$

Discretización de la ecuación:

Se trata de representar la ecuación diferencial mediante una ecuación algebraica. En lugar de obtener los valores de la temperatura en todos los puntos de la región, se obtienen en ciertos puntos que son los nodos de la malla en que se discretizó la región.

Las derivadas se aproximan como series de Taylor truncadas, como sigue:

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta X}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta Y^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta X^2}$$

Estas formas se aproximan mas a los valores verdaderos de las derivadas mientras menor sea el paso de malla.

Substituyendo las derivadas en la ecuación diferencial (que contiene solo segundas derivadas), se obtiene la ecuación discretizada.

$$T_{i,j} = (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})/4$$

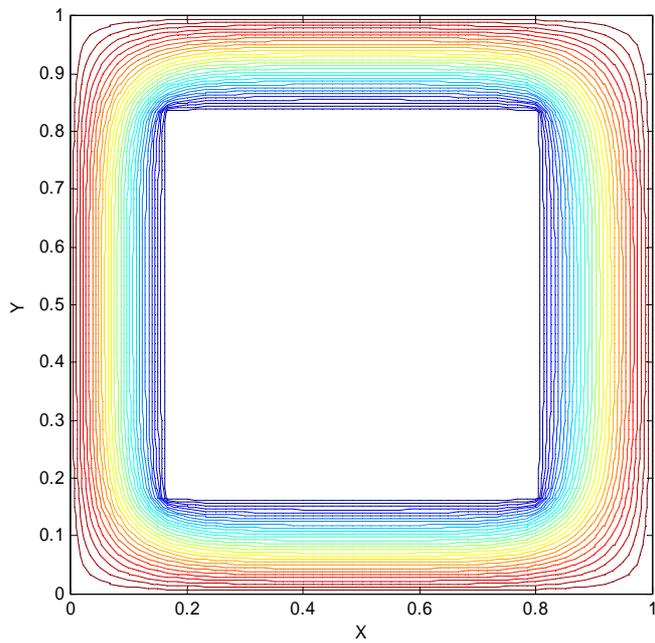
Esta ecuación expresa la temperatura en un nodo en función de las temperaturas de sus 4 vecinos más inmediatos. Como estas temperaturas no se conocen, el proceso de determinar el campo de temperatura es iterativo.

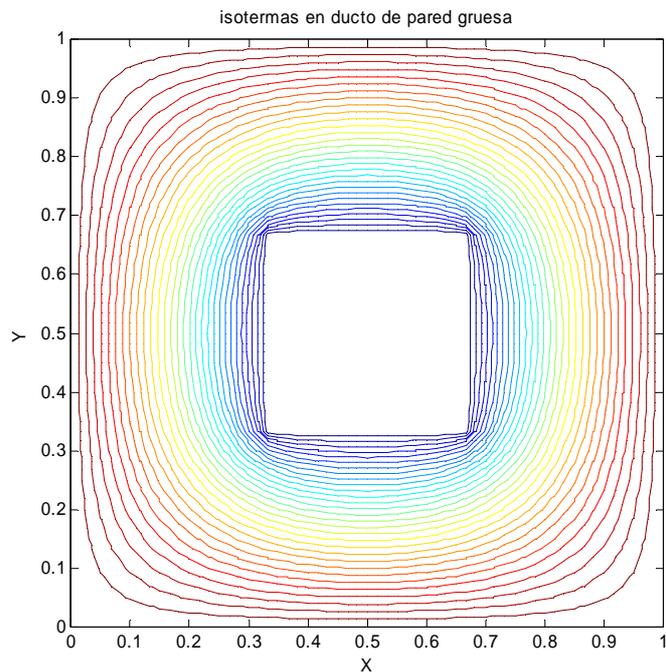
Se conoce la información de las condiciones de borde, y la solución consiste en propagar esa información hacia el interior del dominio.

Partiendo de la posición $X=0$ ($i=1$), $Y=0$, ($j=1$) en que se conoce la temperatura, se puede obtener las temperaturas en la región mediante barridos (iteraciones) a lo largo de las líneas de nodos horizontales, por ejemplo, y luego avanzando a la línea siguiente en dirección vertical.

En este proceso se aplica la ecuación discretizada punto a punto, y completado el barrido se puede iniciar otro barrido hasta obtener convergencia para la distribución de temperatura.

Ejemplo: Un ducto cuadrado con paredes interiores a 0° , y exteriores a 100° . Se usó un Código Fortran para el cálculo numérico (es conveniente traducir a MATLAB) y un programa para construir diagramas de isothermas (MATLAB).





Análisis:

Las isothermas tienden a ubicarse paralelas a una pared de temperatura uniforme.

Se pueden definir varias simetrías en la región, por los ejes de simetría y las diagonales.

Las isothermas llegan perpendiculares a los ejes de simetría.

Esos ejes son superficies de flujo nulo.

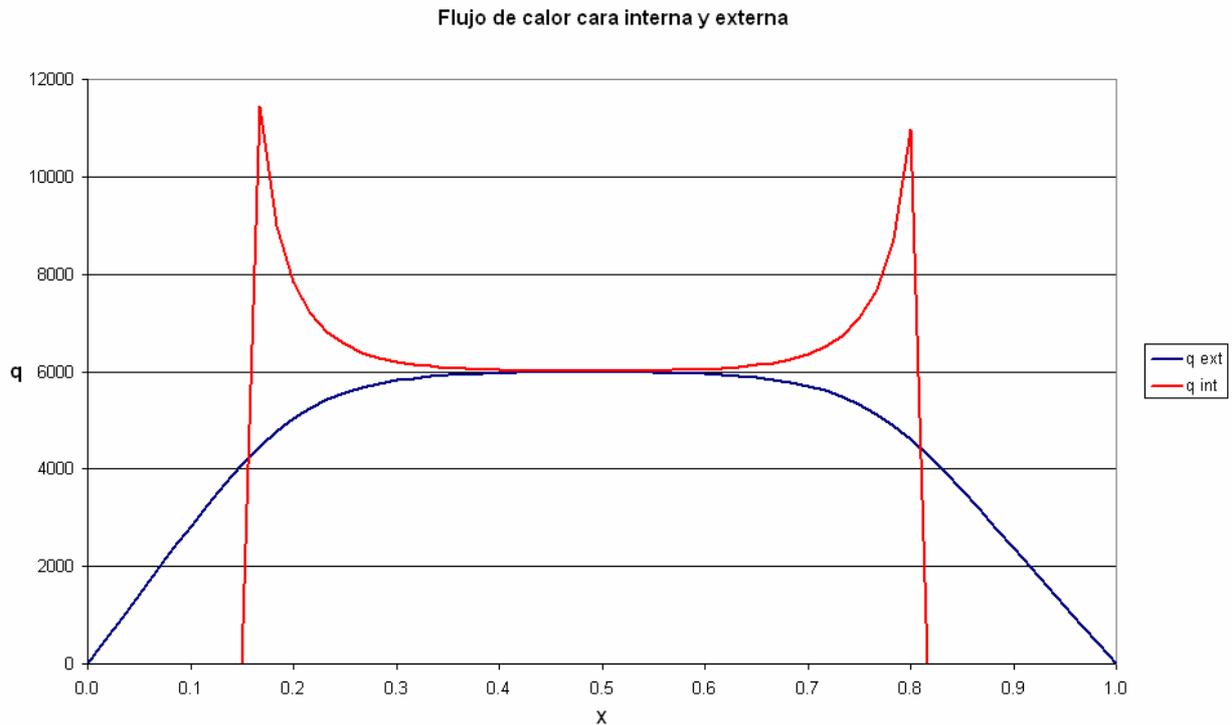
Concluimos que las superficies de flujo nulo tienen isothermas perpendiculares.

Cerca de los ejes de la región el flujo de calor es prácticamente unidimensional (especialmente en el ducto de pared delgada), con isothermas paralelas entre sí y a las paredes, y equiespaciadas (lo que indica distribución lineal de temperatura).

La bi-dimensionalidad se expresa mayormente en las esquinas de la región, en que el gradiente de temperatura disminuye en los vértices externos, como lo indica la mayor separación entre isothermas.

En los vértices internos, en cambio, la separación de las isothermas disminuye, lo que indica mayor gradiente de temperatura, y por lo tanto mayor flujo de calor.

La siguiente figura muestra la distribución de flujo de calor en las caras interna y externa de la pared inferior.



Ambos flujos son iguales en el centro de esa pared, lo que indica tendencia a la unidimensionalidad.

El flujo tiene altos peaks en los vértices de la cara interna.

Mientras tanto, en los vértices de la cara externa, el flujo cae a cero.

Esta distribución de flujos concuerda con lo observado en los diagramas de isothermas.

Listados de programas:

FORTTRAN: Resuelve la ecuación del calor para T

```

dimension t(61,61)
  n1=11
  n2=51
  do 1 i=1,61
do 1 j=1,61
  t(i,j)=0.
1   continue
2   do 2 i=1,61
  t(i,1)=100.
  t(i,61)=100.
2   continue
do 3 j=1,61
  t(1,j)=100.
  t(61,j)=100.

```

```

3  continue
do 5 i=n1,n2
    t(i,n1)=0.
    t(i,n2)=0.
5  continue
do 9 j=n1,n2
    t(n1,j)=0.
    t(n2,j)=0.
9  continue
    ncont=0
c      pared de abajo
6  do 4 i=2,60
do 4 j=2,n1-1
    t(i,j)=(t(i+1,j)+t(i-1,j)+t(i,j+1)+t(i,j-1))/4.
4  continue
c      Pared izquierda
do 10 i=2,n1-1
do 10 j=2,60
    t(i,j)=(t(i+1,j)+t(i-1,j)+t(i,j+1)+t(i,j-1))/4.
10 continue
c      pared derecha
do 11 i=n2-1,60
do 11 j=2,60
    t(i,j)=(t(i+1,j)+t(i-1,j)+t(i,j+1)+t(i,j-1))/4.
11 continue
c pared superior
do 12 i=2,60
do 12 j=n2+1,60
    t(i,j)=(t(i+1,j)+t(i-1,j)+t(i,j+1)+t(i,j-1))/4.
12 continue
    ncont=ncont+1
    if(ncont.lt.500) goto 6
do 8 i=1,61
do 8 j=1,61
    write(7,*) (i-1)/60., (j-1)/60., t(i,j)
8  continue
    stop
    end

```

MATLAB: Grafica isotermas

```

t=load('temp.dat');
n=0;
for i=1:61
    for j=1:61
        n=n+1;
        x(i,j)=t(n,1);
        y(i,j)=t(n,2);
    end
end

```

```

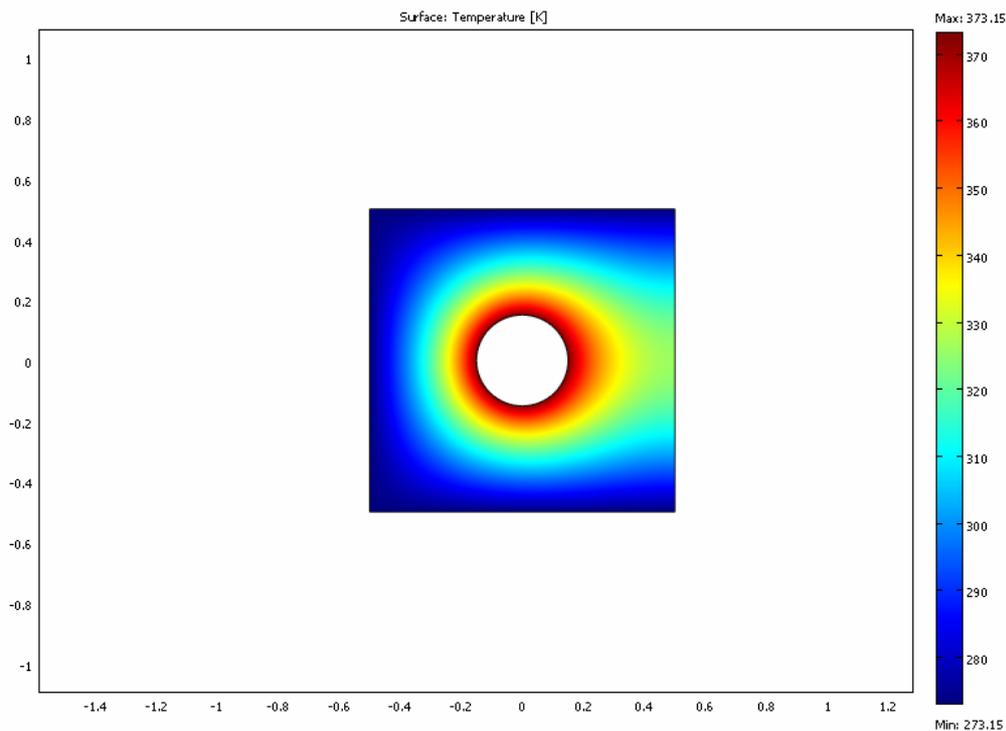
        t1(i, j)=t(n, 3);
    end
end
contour(x', y', t1', 30)

```

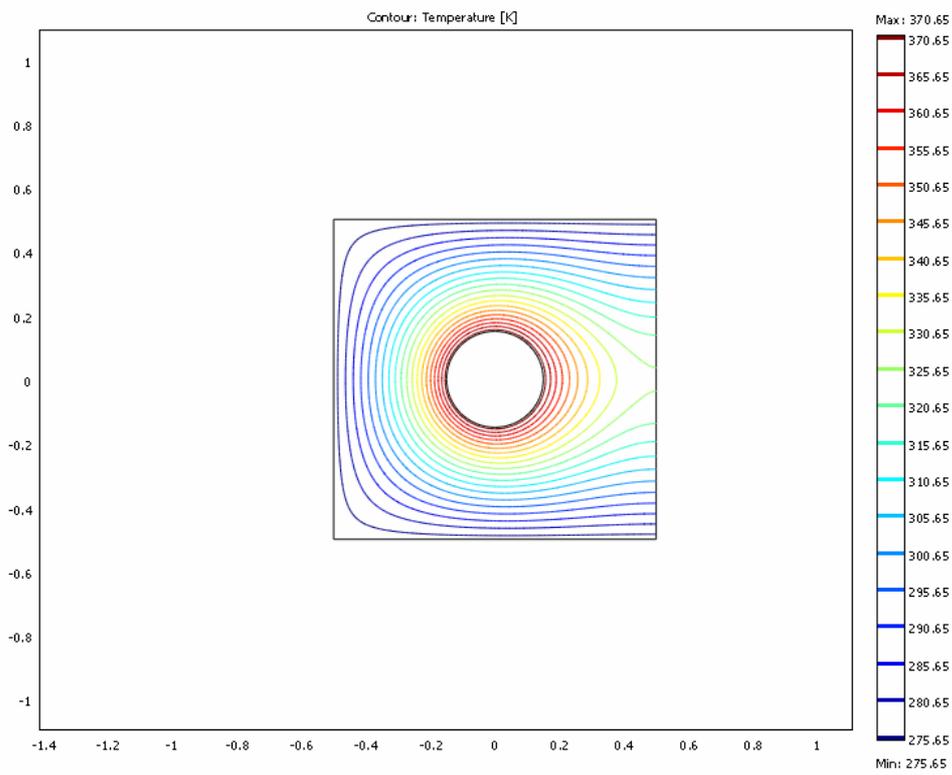
Soluciones mediante softwares comerciales.

Una limitación del método de diferencias finitas es la dificultad de resolver geometrías irregulares, y con caras no paralelas a los ejes coordenados. Uno de los softwares disponibles actualmente en mecánica es COMSOL. Con éste se puede construir un modelo del fenómeno, creando la geometría y añadiendo la formulación física del problema.

Por ejemplo, consideremos un ducto cuya superficie exterior es un cuadrado mientras la interior es cilíndrica. De programar el caso nos encontramos con la dificultad de implementar a la vez el sistema de coordenadas cilíndricas (apropiado al interior) con las rectangulares (apropiado al exterior). El software resuelve este problema mediante la generación de una malla de elementos finitos. Se observan los campos de temperatura de dos maneras:



Vemos un campo de temperatura en escala de colores. La superficie interior (caliente) está a temperatura uniforme. La exterior tiene 3 lados a temperatura uniforme (fría) y el cuarto está aislado.



Esta imagen presenta líneas isotermas del mismo caso. Como se vio en el ejemplo anterior, las isotermas tienden a ubicarse perpendiculares a una superficie aislada.