Otros casos de conducción unidireccional

Radio crítico de aislamiento

Como se vio en clase existe un radio de aislante para el cual la disipación de calor es máxima. Considerando la disipación de calor por un tubo aislado:

$$Q = \frac{2\pi L(T_1 - T_2)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{h_2 r_3}} = \frac{2\pi L(T_1 - T_2)}{R_T} \qquad (1)$$

Buscaremos ese máximo, para lo cual encontraremos un mínimo en la resistencia térmica total. Considerando que el tubo es conocido, tenemos fijas las siguientes variables:

$r_1, r_2, k_1, k_2, h_1, h_2$. Buscaremos el mínimo de la resistencia total c/r a r_3.

$$\frac{dR_T}{dr_3} = 0 = \frac{1}{k_2}\frac{r_2}{r_3}\frac{1}{r_2} - \frac{1}{h_2 r_3^2} = 0 \Rightarrow r_3^* = \frac{k_2}{h_2}$$

Ese es el radio que maximiza la pérdida de calor al minimizar la resistencia térmica total. Se puede ver que crece con aumentos de la conductividad térmica y con disminuciones del coeficiente convectivo.

El siguiente ejemplo permite visualizar estos conceptos:

Se tiene un ducto de diámetros exterior e interior de 80 y 50 mm respectivamente, y de conductividad 40 W/mK, que conduce agua presurizada a 300ºC. El aire ambiente alrededor del ducto está a 20ºC. Los coeficientes convectivos interno y externo son respectivamente de 1500 y 6 W/m^2 K.

a) Determine el calor disipado al ambiente por metro de longitud de tubo.
b) Se propone aislar el tubo con lana mineral (k=0.04 W/mK) de modo que la temperatura exterior de la aislación no exceda los 30ºC. Encuentre el espesor de aislación necesario, y la pérdida de calor desde el tubo aislado.

Solución:

Veamos primero el radio crítico. Este es, según los datos,

$$r_3^* = \frac{k_2}{h_2} = \frac{0.04}{6} = 0{,}006m$$

El radio crítico es mucho menor que el radio exterior del tubo, por lo tanto en este caso, cualquier espesor de aislante disminuirá las pérdidas de calor.

Disipación sin aislante:

$$Q = \frac{2\pi L(T_1 - T_2)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k_1} + \frac{1}{h_2 r_2}} = \frac{2\pi L(300-20)}{\frac{1}{1500\times 0{,}025} + \frac{\ln(80/50)}{40} + \frac{1}{6\times 0{,}04}} = \frac{2\pi L(300-20)}{0{,}027+0{,}011+4{,}16}$$

En la última expresión se ven las magnitudes de las diferentes resistencias térmicas. La de aislamiento deberá ser mayor que todas ellas para producir el efecto buscado.

$$\frac{Q}{L} = 419{,}08 W/m$$

Con aislante, probemos r_3=14 cm

$$\frac{Q}{L} = \frac{2\pi L(300-20)}{0{,}027+0{,}011+31{,}3+4{,}16} = \frac{1759{,}3}{35{,}498} = 49{,}56 W/m$$

Temperatura superficial del aislante:

Conocido Q, se puede expresar: $Q/L = 2\pi r_3 h_2 (T_{sup} - T_2)$
Y de esa expresión sale la temperatura superficial del aislante.

Si en cambio se desea obtener el espesor que genera una temperatura superficial dada del aislante, T_{sup}, es necesario un procedimiento especial, que explicamos a continuación.

El calor disipado se puede expresar de dos maneras:

$$Q = \frac{2\pi L(T_1 - T_{sup})}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{k_2}} = 2\pi L r_3 h_2 (T_{sup} - T_2)$$

La primera lo expresa en función de las resistencias acumuladas desde el interior hasta la pared externa del aislante, y la segunda, en función de la resistencia externa de convección.
No hay contradicción entre esta expresión para Q, que envuelve solo 3 resistencias, y la (1), que involucra 4.

La diferencia de temperatura usada en cada una de estas expresiones es la que corresponde al número de resistencias que hay dentro de esa diferencia de temperatura (3 y 4 resistencias, respectivamente).

Dado que se conocen todas las variables de esta última ecuación, se puede obtener r_3 de ella. r_3 no es despejable, pero se pueden probar diversos radios hasta equilibrar la ecuación o bien usar el método de Newton para encontrar raíces.

Conducción no lineal

Si la conductividad térmica de un material varía con la temperatura, la ecuación de conducción para una superficie plana, sin generación de calor y en régimen permanente se escribe:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0$$

Se pide demostrar que el flujo de calor a través de una placa de espesor e, con temperaturas T_1 y T_2 en sus caras, se puede expresar como en el caso de conductividad constante, pero con una conductividad igual al promedio de las conductividades evaluadas a T_1 y a T_2.

Si la ecuación se integra una vez, el producto de la conductividad térmica por el gradiente de temperatura (es decir, el flujo de calor) no varía con x.

$$\left(k\frac{dT}{dx}\right)=C_1=-q$$

Este resultado es independiente de la forma en que k varíe con la temperatura. Suponiendo que k varía de la forma siguiente:

$$k=k_o(1+bT)$$

$$\left(k_o(1+bT)\frac{dT}{dx}\right)=C_1 \Rightarrow k_o((T_2-T_1)+\frac{b}{2}(T_2^2-T_1^2))=C_1L=-qL$$

$$q=(k_o/2)\left[(1+bT_1)+(1+bT_2)\right](T_1-T_2)/L=\frac{(k(T_1)+k(T_2))}{2}\times\frac{(T_1-T_2)}{L}=k(T_m)\times\frac{\Delta T}{L}$$

Queda demostrado lo dicho anteriormente. La expresión:

$$q=k(T_m)\times\frac{\Delta T}{L}$$

Es general, para cualquier forma lineal de variación de la conductividad con T. En cuanto al perfil de temperatura a través de la placa, este es específico para la forma de variación considerada y se puede obtener así:

Considerando q como una constante:

$$\frac{dT}{dx} + bT\frac{dT}{dx} = -q/k_o$$

$$T + \frac{b}{2}T^2 = -\frac{qx}{k_o} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_1 + \frac{b}{2}T_1^2$$

Resulta:

$$T = \frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{2qx}{k_o b} + \frac{2}{b}(T_1 + \frac{b}{2}T_1^2)}$$

En que q responde a la expresión ya dada. Para verificar, haga x=0 en esta expresión, y compruebe que $T=T_1$. Evidentemente, la temperatura no es lineal con x como era en el caso de k constante.

Queda como ejercicio demostrar que la pendiente de la curva de temperatura es mayor en x=0 (alta k) que en x=L (baja k).

Fuentes volumétricas y fuentes superficiales

La generación interna de calor distribuida en el volumen se traduce en la inclusión de un término fuente en la ecuación del calor.

Ejemplo:

Conductor eléctrico cilíndrico (nichrome), de radio R, longitud L.
Se genera en el interior el calor S en W/m^3. La tasa de generación por unidad de volumen es uniforme.

Sea la temperatura ambiente, To y el coeficiente convectivo exterior: h. La temperatura superficial del alambre, Tp, está por determinar.

La ecuación del calor para conducción radial, permanente, con generación de calor es:

$$\frac{k}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr}) + S = 0$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{Sr}{2k} + \frac{C_1}{r}$$

En el eje del alambre (r=0) el flujo de calor debe ser nulo, lo que implica dT/dr =0 en esa posición, por lo tanto $C_1=0$.

El calor disipado por la superficie es:

$$Q = -k\,2\pi R\,L(\frac{dT(R)}{dr}) = -k\,2\pi R\,L(-SR/2k) = S\pi\,R^2\,L$$

Esto es igual al calor total generado en el alambre (tasa de generación multiplicada por el volumen).

A este resultado hemos llegado sin aplicar la condición de borde.

Es decir, el alambre estará obligado a disipar toda la energía generada en su interior, para lo cual adoptará la temperatura superficial necesaria.

Integrando una vez:

$$T = -\frac{Sr^2}{4k} + C_2$$

En la superficie

$$T_p = -\frac{SR^2}{4k} + C_2$$

Determinamos C_2 aplicando la condición de borde de convección:

$$Q = S\pi\,R^2\,L = hA(T_p - T_o) = h(-\frac{SR^2}{4k} + C_2 - T_o)2\pi RL$$

de donde

$$C_2 = \frac{SR}{2h} + \frac{SR^2}{4k} + T_o$$

con lo cual

$$T_p = T_o + \frac{SR}{2h}$$

Para disipar el calor generado, la superficie adopta una temperatura cuyo exceso sobre el ambiente:

-aumenta con el calor generado y
-disminuye con aumentos del coeficiente de convección

Este ejemplo muestra que en sistemas con generación interna de calor, el calor disipado está impuesto, y la temperatura es la variable dependiente, que resulta de la capacidad de disipación del sistema.

En cuanto a las fuentes térmicas superficiales, que se expresan en W/m2, no aparecen por supuesto en la ecuación diferencial sino que en las condiciones de borde.

Resistencia térmica esférica

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t} = k(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 rT}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}) + S$$

Si se tiene solo conducción radial, sin término fuente y sin generación:

$$(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2}) = 0$$

Pasos sucesivos en la integración:

$$\frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} = 0 \Rightarrow \frac{d(rT)}{dr^2} = C_1 \Rightarrow T = \frac{C_1}{r} + C_2 \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{C_1}{r^2}$$

De esta expresión, se observa que C1 es importante para evaluar el flujo radial de calor.

Determinación de la constante para un casquete esférico, de radios r_1, r_2.Las temperaturas en esas posiciones son T_1, T_2. Aplicando las condiciones de borde:

$$T_1 = \frac{C_1}{r_1} + C_2 \qquad T_2 = \frac{C_1}{r_2} + C_2$$

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

Por lo tanto:

$$q = -k\frac{dT}{dr} = k\frac{C_1}{r^2} = \frac{k(T_1 - T_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

$$Q = -kA\frac{dT}{dr} = 4\pi r^2 k\frac{C_1}{r^2} = \frac{4\pi k(T_1 - T_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

Se dan las expresiones para el flujo de calor por unidad de área y tiempo (q) y por unidad de tiempo (Q).

Resumen: En este capítulo hemos abarcado varias geometrías, mostrando las resistencias características, y los casos de conducción unidireccional permanente.