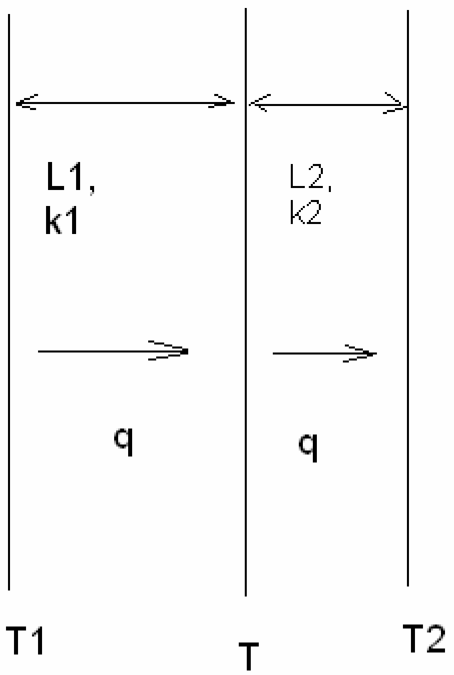
Continuación:

Transferencia de calor a través de placas compuestas:

Consideremos dos placas paralelas en contacto, con sus correspondientes espesores y conductividades.

En la superficie de contacto la temperatura es T, común a ambas placas, y las temperaturas en las caras libres de las placas izquierda y derecha son $T_1$ y $T_2$ respectivamente




$$q_1 = \frac{k_1(T_1 - T)}{L_1} \qquad q_2 = \frac{k_2(T - T_2)}{L_2}$$

En la superficie de contacto, $q_1 = q_2 = q$, es decir, un mismo flujo de calor atraviesa ambas placas. Despejamos las diferencias de temperatura:

$$(T_1 - T) = \frac{L_1}{k_1} q \qquad (T - T_2) = \frac{L_2}{k_2} q$$

Sumando las dos ecuaciones y despejando q, vemos que las placas tienen resistencias térmicas que están conectadas en serie.

Sin fuentes o sumideros de calor en la superficie de contacto, el mismo flujo de calor atraviesa las dos placas. Este es:

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

En términos del flujo Q, es:

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)}{L_1 / k_1 A + L_2 / k_2 A}$$

Para obtener este resultado, se usó la solución de una placa para las dos placas por separado.

Se pudo haber planteado el problema más formalmente así:

Para cada placa vale la ecuación del calor en forma $d^2T/dx^2=0$. Entonces, las temperaturas de las dos placas son:

$T = Ax + B \qquad\qquad T = Cx + D$

Para las placas izquierda y derecha respectivamente. En la cara común las temperaturas son iguales, es decir:

$AL_1 + B = CL_1 + D$

Los flujos de calor en las dos placas son iguales, y se pueden expresar por la ley de Fourier:

$q = -kdT/dx = -k_1 A = -k_2 C \Rightarrow C = A\frac{k_1}{k_2}$

En x=0, se verifica que $T_1 = B$

En el otro extremo tenemos: $T_2 = C(L_1 + L_2) + D$

Después de eliminar las constantes se obtiene el mismo resultado anterior para el flujo de calor.

Extensión a un arreglo de *n* placas paralelas:

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\sum_{i=1}^{i=n} L_i / k_i}$$

## Placa con convección en ambas caras:

Fluido 1: $T_1$ (izquierda)
Fluido 2: $T_2$ (derecha)
Esas son las temperaturas de mezcla de los fluidos

Las caras izquierda y derecha estarán a $T_1'$ y $T_2'$

Por lo tanto:

$$q = \frac{k(T_{1'} - T_{2'})}{L}$$

El calor se expresa también según la condición de borde de convección:

$$q = h_1(T_1 - T_1^{'}) = h_2(T_2 - T_2^{'})$$

Despejando las tres diferencias de temperatura, y sumándolas, se obtiene:

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{1/h_1 + L/k + 1/h_2}$$

Con esta ecuación se calculan pérdidas o ganancias de calor de un recinto a través de sus paredes, conociendo las temperaturas de los fluidos interior y exterior.

## Otras geometrías:

La ecuación del calor en otros sistemas coordenados se escribe, para conductividad constante e isótropa, en las siguientes formas.
En coordenadas cilíndricas:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + S$$

Los componentes de flujo de calor (ley de Fourier) son:

$$q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r} \qquad q_\phi = -k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} \qquad q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

En coordenadas esféricas:

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 rT}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}\right) + S$$

$$q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r} \qquad q_\theta = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta} \qquad q_\phi = -\frac{k}{r\,\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\phi}$$

Para obtener estas formas solo basta encontrar la expresión del Laplaciano en los distintos sistemas coordenados.

Geometría cilíndrica:

Es importante en el caso de tubos que conducen fluidos. Esta situación se da en los intercambiadores de calor industriales.

Considere un casquete cilíndrico (tubo) de radio interno $r_1$ y radio externo $r_2$.

Sea $T=T_1$ en $r_1$ y $T=T_2$ en $r_2$.

Si solo se define un gradiente radial de temperatura, en régimen permanente y sin generación interna de calor, la ecuación del calor se reduce a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

Cuya solución es $T = M\ln r + N$

Aplicando las condiciones de borde se obtiene:

$$T_1 = M\ln r_1 + N \qquad T_2 = M\ln r_2 + N \;\Rightarrow\; M = (T_1 - T_2)/\ln(r_1/r_2)$$

El flujo radial de calor es

$$Q_r = 2\pi r L q_r = -2\pi r L k \frac{dT}{dr} = -2\pi r L k \frac{M}{r}$$

Por lo tanto:

$$Q_r = \frac{2\pi L k (T_1 - T_2)}{\ln(r_2 / r_1)}$$

El concepto de resistencia térmica se usa para paredes cilíndricas concéntricas de largo común y diferente conductividad térmica: Para una pared con 3 capas:

$$Q_r = \frac{2\pi L (T_1 - T_2)}{\ln(r_2 / r_1)/k_1 + \ln(r_3 / r_2)/k_2 + \ln(r_4 / r_3)/k_3}$$

Igual que para paredes planas, se trata el caso de convección con un fluido interior a temperatura $T_1$ y un fluido exterior a $T_2$. Habrá tres resistencias (2 convectivas y una conductiva). El calor transferido radialmente a través de una capa de material es:

$$Q_r = \frac{2\pi L (T_1 - T_2)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln(r_2 / r_1)}{k} + \frac{1}{h_2 r_2}}$$

Esta ecuación representa el calor transferido de un fluido a otro a través de una pared cilíndrica (tubo). Si se desea aislar el tubo, se coloca una segunda capa de material de conductividad $k_2$, hasta un radio $r_3$. En ese caso el flujo de calor es:

$$Q_r = \frac{2\pi L (T_1 - T_2)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln(r_2 / r_1)}{k_1} + \frac{\ln(r_3 / r_2)}{k_2} + \frac{1}{h_2 r_3}}$$

Para que la aislación sea efectiva, la resistencia agregada debe ser mucho mayor que las restantes.

Ejemplos

## SISTEMAS CON GENERACIÓN INTERNA DE CALOR

La generación interna de calor distribuida en el volumen se traduce en la inclusión de un término fuente en la ecuación del calor.

Ejemplo:
Conductor eléctrico cilíndrico (nichrome), de radio R, longitud L.
Se genera en el interior el calor S en $W/m^3$. La tasa de generación por unidad de volumen es uniforme.

Sea la temperatura ambiente, To y el coeficiente convectivo exterior: h. La temperatura superficial del alambre, Tp, está por determinar.

La ecuación del calor para conducción radial, permanente, con generación de calor es:

$$\frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + S = 0$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{Sr}{2k} + \frac{C_1}{r}$$

En el eje del alambre (r=0) el flujo de calor debe ser nulo, lo que implica dT/dr =0 en esa posición, por lo tanto $C_1=0$.

El calor disipado por la superficie es:

$$Q = -k\,2\pi R\,L\left(\frac{dT(R)}{dr}\right) = -k\,2\pi R\,L(-SR/2k) = S\pi R^2 L$$

Esto es igual al calor total generado en el alambre (tasa de generación multiplicada por el volumen).

A este resultado hemos llegado sin aplicar la condición de borde.

Es decir, el alambre estará obligado a disipar toda la energía generada en su interior, para lo cual adoptará la temperatura superficial necesaria.

Integrando una vez:

$$T = -\frac{Sr^2}{4k} + C_2$$

En la superficie

$$T_p = -\frac{SR^2}{4k} + C_2$$

Determinamos $C_2$ aplicando la condición de borde de convección:

$$Q = S\pi R^2 L = hA(T_p - T_o) = h(-\frac{SR^2}{4k} + C_2 - T_o)2\pi RL$$

de donde

$$C_2 = \frac{SR}{2h} + \frac{SR^2}{4k} + T_o$$

con lo cual

$$T_p = T_o + \frac{SR}{2h}$$

Para disipar el calor generado, la superficie adopta una temperatura cuyo exceso sobre el ambiente:

-aumenta con el calor generado y
-disminuye con aumentos del coeficiente de convección

Este ejemplo muestra que en sistemas con generación interna de calor, el calor disipado está impuesto, y la temperatura es la variable dependiente, que resulta de la capacidad de disipación del sistema.