Auxiliar 3

ME3202/ME46A Resistencia de Materiales

Profesor Cátedra: Roger Bustamante P.
Profesor Auxiliar: Eladio Hurtado M.

14 de Abril de 2010

1. En la barra de la figura 1 los extremos A y D estan empotrados. Determinar las tensiones en ambas secciones, cuyas superficies son $A_a = 40[cm^2]$ y $A_b = 80[cm^2]$.

Datos: E=2.1E5[Mpa]

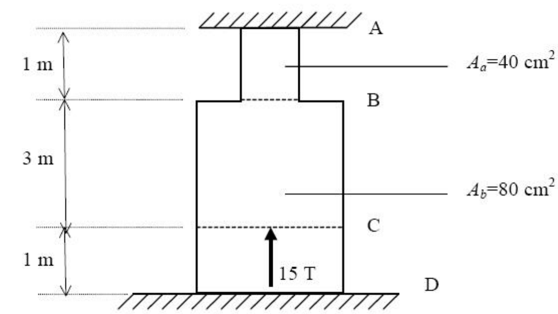

Figura 1: Figura Problema 1

Diagrama de cuerpo libre de la barra

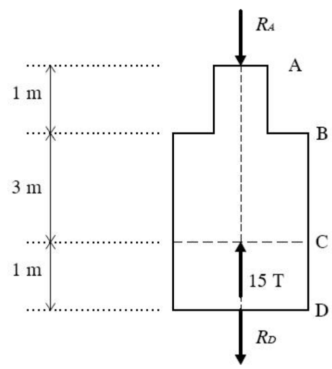

Figura 2: DCL Problema 1

$$\begin{gathered}\sum F_Y = 0 \Rightarrow \\ F_A + F_D = 15[ton]\end{gathered} \tag{1}$$

Se tiene una sola ecuación y dos incógnitas, las otras dos ecuaciones de estática no aportan información adicional.

Ecuación de compatibilidad geométrica: El tramo AC está comprimido y el tramo CD está traccionado. Como ambos extremos están empotrados la variación total de la barra es cero, en otras palabras, lo que se alarga el tramo CD es igual a lo que se comprime o acorta el tramo CD.
Para el tramo CD se tiene:

$$N(x) = R_D \ (Tracción) \tag{2}$$

Para el tramo AC se tiene:

$$N(x) = -R_A \ (compresión) \tag{3}$$

Donde N(x) es la fuerza interna normal a la sección transversal.

$$\Delta_{AB} + \Delta_{BC} + \Delta_{CD} = 0 \tag{4}$$

Aplicando la ley de Hooke

$$\frac{-R_A L_{AB}}{EA_a} + \frac{-R_A L_{BC}}{EA_b} + \frac{R_D L_{CD}}{EA_b} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{-1000R_A}{2,1E5 \cdot 40E2} + \frac{-3000R_A}{2,1E5 \cdot 80E2} + \frac{1000R_D}{2{,}1E5 \cdot 80E2} = 0 \tag{6}$$

$$5R_A = R_D \tag{7}$$

Utilizando las ecuaciones 1 y 7 se obtiene:

$$\begin{aligned} R_A &= 2,5[ton] \\ R_D &= 12,5[ton] \end{aligned} \tag{8}$$

Cálculo de tensiones.

$$\sigma_{AB} = \frac{25000}{40E2} = 6,25[MPa] \tag{9}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{25000}{80E2} = 3,125[MPa] \tag{10}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{125000}{80E2} = 15,625[MPa] \tag{11}$$

2. Una pieza con forma de cono está hecho de un material que tiene un peso específico γ y un módulo de elasticidad E. El cono tiene las dimensiones del cono se muestran en la figura 3. Determine el desplazamiento de su extremo inferior bajo el efecto de su propio peso.

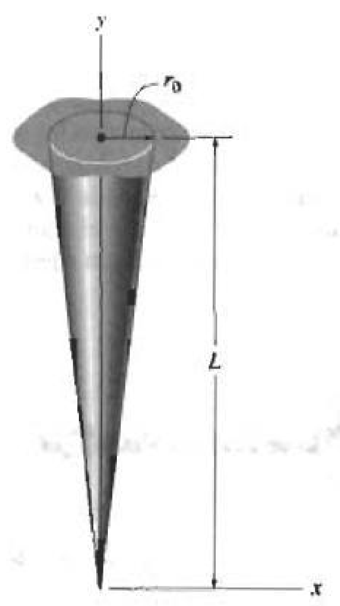

Figura 3: Figura Problema 2

La fuerza normal interna varía a lo largo del cono ya que depende del peso W(y) de un segmento del cono situado debajo de cualquier sección. Por lo tanto para

calcular el desplazamiento debemos calcular W(Y), para lo cual procederemos de la siguiente manera:
Radio en función de y.

$$\begin{aligned} \frac{r(y)}{y} &= \frac{r_0}{L} \\ \Rightarrow r(y) &= y\frac{r_{=}0}{L} \end{aligned} \tag{12}$$

El volumen de un cono con base de radio r(y) y altura y es:

$$V(y) = \frac{\pi}{3}r(y)^2 \tag{13}$$

Como $W(y) = \gamma V(y)$ La fuerza interna normal es la que se muestra en la figura 4:

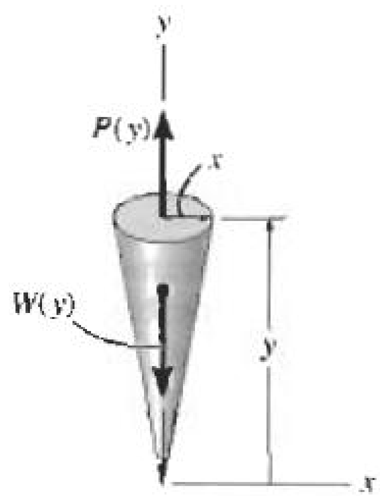

Figura 4: DCL Cono

$$P(y) = \frac{\gamma\pi r_0^2}{L^2}y^3 \tag{14}$$

Ahora con P(y), el único término que falta obtener para aplicar la ley de Hooke es el área en función A(y).

$$A(y) = \pi r(y)^2 = \frac{\pi r_0^2}{L^2}y^2 \tag{15}$$

Aplicando la ley de Hooke se tiene:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{P(y)}{EA(y)}dy = \int_0^L \frac{\gamma\pi r_0^2 L^2 y^3}{\pi r_0^2 3y^2 E}dy$$
$$\Delta L = \frac{\gamma}{3E}\int_0^L ydy = \frac{\gamma L^2}{6E} \tag{16}$$

3. Las tres barras de acero A-36 mostradas en la figura 5 están conectadas por pasadores a una viga. Si la carga aplicada sobre la viga es de 15 [kN], determine la fuerza desarrollada en cada barra. Las barras AB y EF tienen cada una sección transversal de 25 $[mm^2]$ **y la barra CD una sección transversal de 15**$[mm^2]$

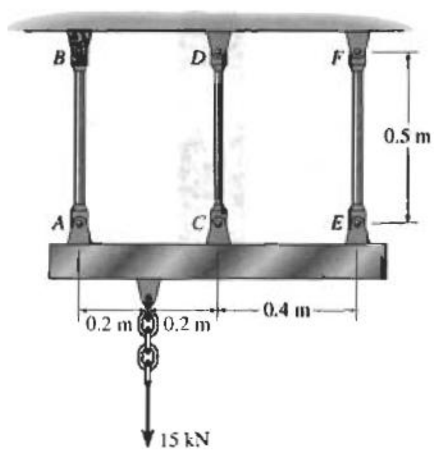

Figura 5: Figura Problema 3

El diagrama de cuerpo libre de la viga se muestra en la figura 6 Las ecuaciones de equilibrio son:

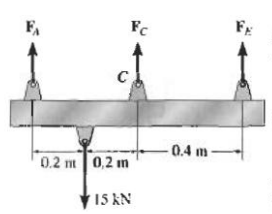

Figura 6: DCL Problema 3

$$
\begin{gathered}
\sum F_Y = 0 \Rightarrow \\
F_A + F_C + F_E = 15
\end{gathered}
\tag{17}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum M_C = 0 \Rightarrow \\
-0,4 \cdot F_A + 0,2 \cdot 15 + 0,4 \cdot F_E = 0
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Ecuación de compatibilidad geométrica: Debido a los desplazamientos e los extremos de cada barra, la línea ACE mostrada en la figura 7 tomará la posición definida por los puntos A'C'E'. Desde esta posición, los desplazamientos de los puntos A, C y E pueden relacionarse por triángulos semejantes:

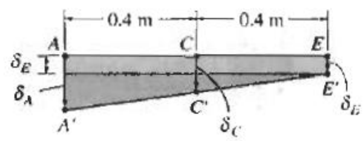

Figura 7: Desplazamiento viga ACE

$$
\frac{\delta_A - \delta_E}{0,8} = \frac{\delta_C - \delta_E}{0,4} \Rightarrow \delta_C = 0,5(\delta_A + \delta_E) \tag{19}
$$

$$
\frac{F_C L}{15E} = 0,5(\frac{F_A L}{25E} + \frac{F_E L}{25E}) \tag{20}
$$

Resolviendo las ecuaciones 17, 18 y 20 se tiene:

$$
\begin{aligned}
F_A &= 9,52[N] \\
F_C &= 3,46[N] \\
F_A &= 2,02[N]
\end{aligned}
\tag{21}
$$

4. **La barra rígida que se muestra en la figura 8 está suspendida por dos cables de igual diáametro ϕ= 4[mm], cuyos modulos de elasticidad son: E1 = 2,1E5[MPa] y E2 = 0,7E5[MPa]. La longitud de la barra es de 600[mm] y la de los cables 300[mm]. Se considera despeciable el peso propio de la barra. Dicha barra está sometida a una carga puntual P = 500[N]. Calcular la posición x de la fuerza para que los puntos A y B tengan el mismo descenso.**

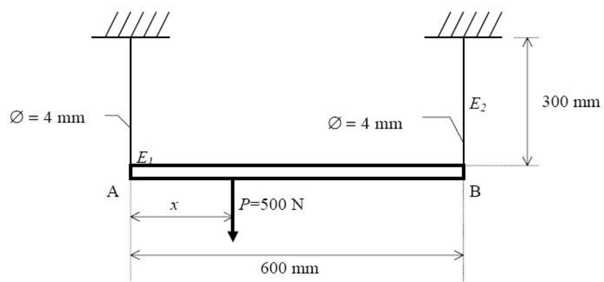

Figura 8: Figura Problema 4

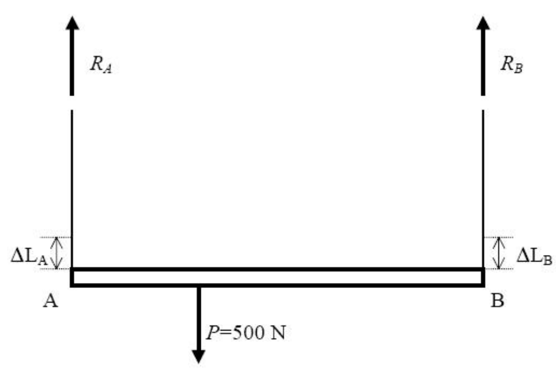

Figura 9: DCL Problema 4

$$\begin{gathered}\sum F_Y = 0 \Rightarrow \\ R_A + R_B = P\end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\sum M_B = 0 \Rightarrow \\ L \cdot R_A + (L - x) \cdot P = 0\end{gathered} \tag{23}$$

Además de las ecuaciones de equilibrio hay que imponer igualdad de desplazamientos en los cables.

$$\Delta_A = \Delta_B \tag{24}$$

Aplicando la ley de Hooke

$$\frac{R_A L}{S E_1} = \frac{R_B L}{S E_2} \tag{25}$$

Resolviendo las ecuaciones 22, 23 y 25.

$$\begin{aligned} &R_A = 375[N] \\ &R_B = 125[N] \\ &x = 150[mm] \end{aligned} \tag{26}$$