MA608 Análisis I. Semestre 2010-01
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Tarea # 1 (Opcional)

Viernes 23 de Julio de 2010

Semigrupos fuertemente continuos.

Definición 1. *Una familia* $(T(t))_{t\geq 0}$ *de operadores lineales continuos sobre un espacio de Banach* X *se dice* semigrupo *si satisface la ecuación funcional*

$$\begin{aligned} T(t+s) &= T(t)T(s) \quad \forall t,s\geq 0 \\ T(0) &= I \end{aligned} \tag{FE}$$

y se dice un semigrupo fuertemente continuo *si: para todo* $x \in X$ *las* orbitas

$$\xi_x \colon t \mapsto \xi_x(t) := T(t)x \tag{SC}$$

son continuas de $\mathbb{R}_+$ *en* X*.*

1. Muestre que la propiedad (SC) puede ser expresada diciendo que la aplicación

$$t \mapsto T(t)$$

es continua de $\mathbb{R}_+$ en $\mathcal{L}(X)$.
Use el principio de acotación uniforme.

Propiedades básicas.

Lema 1. *Sea* X *un espacio de Banach y* $F\colon K\subset \mathbb{R}\to\mathcal{L}(X)$*,* K *compacto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) F *es continua de* K *en* $\mathcal{L}(X)$*, es decir, las aplicaciones* $K \ni t \mapsto F(t)x$ *son continuas para todo* $x \in X$*.*

(b) F *es uniformemente acotada sobre* K*, y las aplicaciones* $K \ni t \mapsto F(t)x \in X$ *son continuas para todo* x *en algún subconjunto denso* D *de* X*.*

(c) F *es continua para la topología de la convergencia uniforme en compactos de* X*, es decir, la aplicación*

$$K \times C \ni (t,x) \mapsto F(t)x \in X$$

es uniformemente continua sobre cada compacto C *en* X*.*

2. Haga la demostración del lema 1.
Indicación: Considere el siguiente esquema:
$(c) \Rightarrow (a)$
$(a) \Rightarrow (b)$: Use el principio de acotación Uniforme.
$(b) \Rightarrow (c)$: Recuerde que compacto implica totalmente acotado.

Proposición 1. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo sobre un espacio de Banach X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) $(T(t))_{t\geq 0}$ *es fuertemente continuo.*

(b) $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ *para todo* $x \in X$.

(c) Existe $\delta > 0$, $M \geq 1$, *y un subconjunto denso* D *de* X *tal que*

  (i) $\|T(t)\| \leq M$ *para todo* $t \in [0, \delta]$,

  (ii) $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ *para todo* $x \in D$.

3. Haga la demostración de la proposición 1.
Indicación: Considere el siguiente esquema:
$(a) \Rightarrow (c.i)$
$(a) \Rightarrow (c.ii)$: Por contradicción suponga que existe una sucesión $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ convergiendo a cero tal que $\|T(\delta_n)\| \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$ y use el principio de acotación uniforme.
$(c) \Rightarrow (b)$: Defina $K := \{t_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ para una sucesión arbitraria $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ convergiendo a $t = 0$ y use el lema 1.
$(b) \Rightarrow (a)$: Sea $t_0 > 0$ y $x \in X$. Muestre la continuidad a la derecha, es decir,

$$\lim_{h\downarrow 0} \|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| = 0.$$

Para la continuidad a la izquierda: si $h < 0$, pruebe la estimación

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0 + h)\| \|x - T(-h)x\|$$

y concluya continuidad a la izquierda cuando $\|T(t)\|$ se mantiene uniformemente acotado para $t \in [0, t_0]$. Usando el principio de acotación uniforme pruebe que $\|T(t)\|$ se mantiene uniformemente acotado para algún intervalo pequeño $[0, \delta]$ y usando (FE) deduzca que $\|T(t)\|$ se mantiene uniformemente acotado para cada intervalo compacto.

1. Aplicaciones

1. Muestre que el semigrupo $(T_l(t))_{t\geq 0}$ definido por

$$(T_l(t)f)(s) := f(s+t), \quad s,t \geq 0,$$

es fuertemente continuo sobre los siguientes espacios de Banach

(a) $C_0(\mathbb{R}_+) := \{f \in C(\mathbb{R}_+) \colon \lim_{s\to+\infty} f(s) = 0\}$, dotado de la norma del supremo.

(b) $C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R}_+) := \{f \in C(\mathbb{R}_+) \colon f$ es acotada y uniformemente continua$\}$, dotado de la norma del supremo.

(c) $C_0^1(\mathbb{R}_+) := \{f \in C(\mathbb{R}_+) \colon \lim_{s\to+\infty} f(s) = \lim_{s\to+\infty} f'(s) = 0\}$, dotado de la norma $\|f\| := \sup_{s\geq 0} |f(s)| + \sup_{s\geq 0} |f'(s)|$.

2. Defina

$$(T(t)f)(s) := f(se^t), \quad s,t \geq 0.$$

Muestre que $(T(t))_{t\geq 0}$ define un semigrupo fuertemente continuo sobre

$$X_\infty := C_0[1,\infty) := \{f \in C[1,\infty) \colon \lim_{s\to+\infty} f(s) = 0\}.$$

3. Sobre $X := C[0,1]$, definimos operadores acotados $T(t)$, $t > 0$, por

$$(T(t)f)(s) := \begin{cases} e^{t\log s}[f(s) - f(0)\log s] & \text{si } s \in (0,1], \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

para $f \in X$ y defina $T(0) := I$. Pruebe que

a) $(T(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo sobre $(0,\infty)$.

b) $\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)\| = \infty$.

4. Sea X un espacio de Banach.

Definición 2. *Para $A \in \mathcal{L}(X)$ definimos*

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \tag{1}$$

para todo $t \geq 0$.

(i) Demuestre que $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$.

(ii) Demuestre la siguiente proposición:

Proposición 2. *Para $A \in \mathcal{L}(X)$ considere $(e^{tA})_{t\geq 0}$ definido por (1). Entonces*

(a) $(e^{tA})_{t\geq 0}$ es un semigrupo sobre X tal que

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto e^{tA} \in (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|)$$

es continua.

(b) La aplicación $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t) := e^{tA} \in (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|)$ es diferenciable y satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t) &= AT(s) \quad \forall t \geq 0 \\ T(0) &= I. \end{aligned} \tag{DE}$$

Recíprocamente, cada función diferenciable $T(\cdot) \colon \mathbb{R}_+ \to (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|)$ satisfaciendo (DE) es también de la forma $T(t) = e^{tA}$ para $A = \dot{T}(0) \in \mathcal{L}(X)$.

Referencias

[1] Klaus-Jochen Engel, Rainer Nagel *A Short Course on Operator Semigroups*, Universitext, Springer (2005).