TD2: Análisis I

Profesor : Rafael Correa
Auxiliares : C. Hermosilla & E. Vilches
7 de Abril de 2010

Problema 1.
Sea $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ el espacio producto de un conjunto finito $\mathcal{A}$ (elementos de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ se pueden ver como secuencias bi-infinitas $x_{[-\infty,\infty]} = \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$ de símbolos de $\mathcal{A}$). Sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ definimos la función

$$d(x,y) := 2^{-\inf\{n\geq 0\colon x_{[-n,n]}\neq y_{[-n,n]}\}}.$$

1. Pruebe que $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, d)$ es un espacio ultramétrico compacto.
   Indicación: Use el principio del palomar en un argumento diagonal para mostrar compacidad.

2. Deduzca que $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un espacio completo, totalmente acotado y sin puntos aislados.

3. Describa las bolas abiertas $B(x,\epsilon) := \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}\colon d(x,y) < \epsilon\}$ y las bolas cerradas $\overline{B}(x,\epsilon) := \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}\colon d(x,y) \leq \epsilon\}$ en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ para $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$. ¿Qué sucede si $B(x,\epsilon)\cap B(y,\epsilon') \neq \emptyset$ para $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $0 < \epsilon, \epsilon' \in \mathbb{R}$?.

4. Para cada $\epsilon > 0$ encuentre un cubrimiento finito estándar del espacio $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ dado por las bolas abiertas disjuntas de diámetro ϵ.

Problema 2.
Considere $(C([0,1];\mathbb{R}), d_\infty)$ donde d_∞ es la métrica de la convergencia uniforme y para $m \geq 1$ entero definimos

$$F_m = \left\{ f \in C([0,1];\mathbb{R})\colon \exists t \in [0, 1-\frac{1}{m}] \text{ tal que } \left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| \leq m \quad \forall h \in (0,\frac{1}{m}) \right\}.$$

Muestre que F_m es cerrado de interior vacío. Deduzca que el conjunto de las funciones en $C([0,1];\mathbb{R})$ que no son diferenciables en ningún punto de $(0,1)$ es denso en $C([0,1];\mathbb{R})$.

Problema 3 (*Lema de Dini.*)**.**
Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones en $C(X;\mathbb{R})$ dotado de la métrica d_∞ de la convergencia uniforme. Demuestre que si la sucesión converge puntualmente a una función $f \in C(X;\mathbb{R})$, entonces (f_n) converge uniformemente a f.
Indicación: Para $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ considere el conjunto $\Omega_n = \{x \in X\colon f_n(x) > f(x) - \epsilon\}$.

Problema 4.
Sea f una función analítica sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n_x \in \mathbb{N}) \text{ tal que } f^{(n_x)}(x) = 0.$$

Muestre que f es un polinomio.

Problema 5.
Sea $(X,\cdot)$ un grupo abeliano dotado de una métrica d tal que la multiplicación y la inversa son continuas. Supongamos que (X,d) es compacto. Nos proponemos demostrar que no existe un isomorfismo continuo de $(\mathbb{R},+)$ sobre $(X,\cdot)$. Supongamos por el absurdo que T es tal isomorfismo.

1. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = [-n, n]$. Muestre que existe p tal que $T(I_p)$ es de interior no vacío.

2. Muestre que existen $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ tales que $T^{-1}(X) = \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + I_p)$.

3. Concluya.

Problema 6.
Sean (X, d_1) un espacio métrico, (Y, d_2) un espacio métrico compacto y $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ una función semicontinua inferior. Pruebe que

$$g(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y)$$

es semicontinua inferior.

Problema 7. (1) Sea f una función creciente de I en $\mathbb{R}$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es abierto no vacío. Sea S el conjunto de los puntos de discontinuidad de f. Si $x \in I$, denote por $f(x_+)$ y $f(x_-)$ los límites por la derecha y por la izquierda de f en x.

a) Pruebe que $S = \{x \in I\colon f(x_-) < f(x_+)\}$.

b) Para $x \in S$, denote $I_x = (f(x_-), f(x_+))$. Usando la familia $(I_x)_{x \in S}$, demuestre que S es numerable.

c) Recíprocamente, sea $S = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto numerable de I. Demuestre que existe una función creciente cuyos puntos de discontinuidad es exactamente S.
Indicación: Defina $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} 1_{[x_n, +\infty)}(x)$.

(2) *Teorema de Helly.*
Sea (f_n) una sucesión de funciones crecientes de un intervalo no vacío $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que para cada $x \in I$ la sucesión $(f_n(x))$ es acotada.

a) Pruebe que existe una subsucesión $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{Q} \cap I$, la sucesión $(f_{\varphi(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Para tales valores de x, defina $g(x) = \lim_{n \to \infty} f_{\varphi(n)}(x)$.

b) Extienda g a I definiendo, para $x \in I \setminus \mathbb{Q}$,

$$g(x) = \sup\{g(y)\colon y \in \mathbb{Q} \cap I \text{ y } y < x\}.$$

Demuestre que $g(x)$ está bien definida para todo $x \in I$ y que la función g es creciente sobre I.

c) Sea C el conjunto de puntos de I donde g es continua. Por la parte (1) el conjunto $D = I \setminus C$ es numerable. Demuestre que, para cada $x \in C$, la sucesión $(f_{\varphi(n)(x)})$ converge hacia $g(x)$.
Indicación: Sea $x \in C$. Pruebe que, si $y, z \in \mathbb{Q} \cap I$ con $y < x < z$, tenemos

$$g(y) \leq \liminf_{n \to \infty} \left(f_{\varphi(n)}(x)\right) \leq \limsup_{n \to \infty} \left(f_{\varphi(n)}(x)\right) \leq g(z).$$

d) Demuestre que existe una subsucesión $f_{\varphi(\psi(n))}$ tal que, para cada $x \in I$, la sucesión $f_{\varphi(\psi(n))}(x)$ converge

Problema 8. 1. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Pruebe que el conjunto de puntos donde f es continua es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$, esto es, una intersección numerable de abiertos en $\mathbb{R}$.
Indicación: Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina C_n como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los que existe un abierto V conteniendo x y tal que $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$ para todo $y, z \in V$. Pruebe que los conjuntos C_n son abiertos.

2. Demuestre que $\mathbb{Q}$ no es G_δ en $\mathbb{R}$.

Problema 9. 1. Sea X un espacio métrico. Diremos que una familia de abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de X es una base de abiertos (o base abierta) de X si, para cada abierto no vacío $U \subset X$ y para cada $x \in U$, existe $i \in I$ tal que $x \in U_i \subset U$.

a) Sea $\mathcal{U}$ una base abierta de X. Probar que cualquier abierto U en X es la unión de elementos de $\mathcal{U}$ contenidos en U.

b) Probar que X es separable si y sólo si este posee una base abierta numerable. *Indicación:* Si (x_n) es una sucesión densa en X, la familia

$$(B(x_n, 1/(p+1)))_{n,p\in\mathbb{N}}$$

es una base abierta de X. Recíprocamente, si (U_n) es una base abierta de X, cualquier sucesión (x_n) con la propiedad que $x_n \in U_n$ para cada n es denso en X.

2. *Teorema de Lindelöf.* Pruebe que un espacio métrico X es separable si y sólo si cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable. *Indicación:* Sea (V_n) una base abierta numerable de X y sea $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X. Tome $n \in \mathbb{N}$. Si V_n está contenido en algún U_i, elija un elemento $i(n)$ de I tal que $V_n \subset U_{i(n)}$; sino, elija $i(n) \in I$ arbitrario. Demuestre que la familia $(U_{i(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ cubre X.