

MA57I Tópicos en Análisis Convexo II. Semestre 2010-01

Profesor: Rafael Correa y Abderrahim Hantoute Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Auxiliar 9

Miércoles 2 de Junio de 2010

P1. *Aproximación Moreau-Yosida*

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert, y $f \in \Gamma_0(H)$ una función. Para $\lambda > 0$, definimos la aproximación Moreau-Yosida de f como

$$f_\lambda(x) := \inf \{ f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|x - y\|^2, y \in H \}.$$

- (i) Demuestre que f_λ es convexa.
- (ii) Demuestre que para todo $x \in H$ el ínfimo en la definición de f_λ se alcanza en un único punto, que denotaremos $y_\lambda(x)$.
Indicación: Verifique que la función $\varphi_x(y) := f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|x - y\|^2$ es coercitiva.
- (iii) Demuestre que f_λ es continua en H .
Indicación: Muestre que f_λ es acotada superiormente en un abierto.
- (iv) Calcula $\partial f_\lambda(x)$.
- (v) Concluya que f_λ es Gâteaux diferenciable y que $\nabla f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}(x - y_\lambda(x))$, muestre además que $\nabla f_\lambda(x)$ está incluido en $\partial f(y_\lambda(x))$.
- (vi) Determine el rango del operador $(\partial f + \lambda I)$, donde I es el operador identidad.
- (vii) Demuestre la siguiente desigualdad:

$$\|y_\lambda(x) - y_\lambda(y)\|^2 \leq \langle y_\lambda(x) - y_\lambda(y), x - y \rangle \text{ para todo } x, y \in H. \quad (1)$$

Concluya que $y_\lambda(\cdot)$ es Lipschitz continua y que f_λ es C^1 .

Indicación: Use (v) y el hecho que ∇f_λ es monótono.

- (viii) Demuestre que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} y_\lambda(x) = x$ para todo $x \in \text{dom } f$.

Indicación: Acote $\|y_\lambda(x) - x\|$ usando el hecho que f esta minorada por una función afín continua y que $f_\lambda(x) \leq f(x)$.

- (ix) Demuestre que $f_\lambda(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in H$.