MA57I Tópicos en Análisis Convexo II. Semestre 2010-01
Profesor: Rafael Correa y Abderrahim Hantoute **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Auxiliar 7

Miércoles 12 de Mayo de 2010

P1. *Valor propio máximo.*
Denotemos por $\mathbb{S}^n$ (resp. $\mathbb{S}^n_+$) el conjunto de matrices simétricas de orden n (resp. simétricas semi-definidas positivas). Dotamos a $\mathbb{S}^n$ con el producto escalar $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}AB$. Considere $\lambda_{\text{máx}}\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ la aplicación valor propio máximo.

a) Demuestre que la función $\lambda_{\text{máx}}$ es una función convexa.
Indicación: Pruebe que $\lambda_{\text{máx}}(A) = \sup\limits_{\|v\|=1} v^\top Av$.

b) Demuestre que la conjugada de $\lambda_{\text{máx}}$ está dada por

$$\lambda^*_{\text{máx}}(A^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } A^* \in \mathbb{S}^n_+ \text{ y } \mathrm{tr}A^* = 1 \\ +\infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

c) Demuestre que el subdiferencial de $\lambda_{\text{máx}}$ está dado por

$$\partial\lambda_{\text{máx}}(A) = \mathrm{co}\{vv^\top\colon \|v\|_2 = 1,\, Av = \lambda_{\text{máx}}(A)v\}$$

d) Demuestre que

1) $\lambda_{\text{máx}}(\cdot)$ es diferenciable en A si $\lambda_{\text{máx}}(A)$ es simple, y que en este caso $\nabla\lambda_{\text{máx}}(A) = vv^\top$, donde $\pm v$ son los únicos vectores propios unitarios correspondientes al valor propio máximo.
2) $\partial\lambda_{\text{máx}}(0) = \{S \in \mathbb{S}^n_+\colon \mathrm{tr}S = 1\}$.
3) La derivada direccional de $\lambda_{\text{máx}}$ en $A \in \mathbb{S}^n$ sobre la dirección $D \in \mathbb{S}^n$ es

$$\lambda'_{\text{máx}}(A; D) = \lambda_{\text{máx}}(V^\top DV),$$

donde V es una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal del espacio propio asociado a $\lambda_{\text{máx}}(A)$.