MA57I Tópicos en Análisis Convexo II. Semestre 2010-01
Profesor: Rafael Correa y Abderrahim Hantoute **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Auxiliar 4

Miércoles 21 de Abril de 2010

1. Clase Auxiliar

P1. *Suma epigráfica.*
Sea X un espacio vectorial normado. Sean $f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dos funciones. La suma epigráfica (o inf-convolución) de f y g es la función $f +_e g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida para todo $x \in X$ por

$$(f +_e g)(x) = \inf_{z \in X} (f(z) + g(x - z)).$$

a) Sea $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, defina el epigrafo estricto $\mathrm{epi}'(h)$ como

$$\mathrm{epi}'(h) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \colon h(x) < t\}.$$

Pruebe que

$$\mathrm{epi}'(f +_e g) = \mathrm{epi}'(f) + \mathrm{epi}'(g).$$

b) Sea $A \subset X$ un subconjunto no vacío de X. Pruebe que

$$d(x, A) = (i_A +_e \|\cdot\|)(x)$$

c) Demuestre que si f, g son convexas, entonces $(f +_e g)$ es convexa.

d) Demuestre que si f, g son convexas y propias, entonces

$$(f +_e g)^* = f^* + g^*.$$

P2. *Función de recesión.*
Sea X un espacio normado y $\Gamma_0(X)$ el conjunto de las funciones $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexas semi-continuas inferiormente y propias. Considere $f \in \Gamma_0(X)$, $a \in \mathrm{dom} f$, $u \in X$ y $\epsilon > 0$.
Definimos para todo $u \in X$

$$f^{\infty}(u) = \sup_{t>0} \left(\frac{f(a + tu) - f(a)}{t} \right) = \sup_{t>0} \psi_t(u) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

donde para todo $t > 0$, $\varphi_t\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ está definida por $\psi_t(u) = \frac{f(a+tu)-f(a)}{t}$ para todo $u \in X$.

a) Muestre que $f^{\infty} \in \Gamma_0(X)$ y que $f^{\infty}(u) = \lim_{t \to +\infty} \psi_t(u)$.

b) Muestre que $\psi_t^*(\ell) = \frac{f^*(\ell)+f(a)-\ell(a)}{t}$ para todo $\ell \in X^*$ y que

$$\inf_{t>0} \psi_t^*(\ell) = \lim_{t \to +\infty} \psi_t^*(\ell) = i_{\mathrm{dom} f^*}(\ell) \text{ para todo } \ell \in X^*.$$

Deducir que $f^{\infty}(u) = \sup_{\ell \in X^*} (\ell(u) - i_{\mathrm{dom} f^*}(\ell)) = \sigma_{\mathrm{dom} f^*}(u)$ y que f^{∞} no depende de $a \in \mathrm{dom} f$.

P3. *a*) Sea I un conjunto y sean $(a_i)_{i \in I} \subset \overline{\mathbb{R}}$, $(b_i)_{i \in I} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Muestre que

$$\sup(\sup_{i \in I} a_i, \sup_{i \in I} b_i) = \sup_{i \in I}(\sup(a_i, b_i)).$$

b) Sea X un espacio normado y sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función par. Muestre que para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\varphi^*(t) = \sup_{s \geq 0} (s|t| - \varphi(s)).$$

Muestre que la conjugada de la función $f(x) = \varphi(\|x\|)$ es la función $g(\ell) = \varphi^*(\|\ell\|_*)$.