MA57I Tópicos en Análisis Convexo II. Semestre 2010-01

Profesor: Rafael Correa y Abderrahim Hantoute Auxiliares: Christopher Hermosilla y Emilio Vilches

Auxiliar 1

31 de Marzo de 2010

1. Clase Auxiliar

P1. Continuidad de funciones convexas.

a) Sean K un subconjunto convexo no vacío de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ y f una función convexa de K en $\mathbb{R}$. Denotamos por $\text{int } K$ el interior de K . Supongamos que existe un punto $x_0 \in \text{int } K$ tal que f es acotada en una vecindad de x_0 , mas precisamente, existe $r > 0$ y $M \in \mathbb{R}$ tales que la bola cerrada $\overline{B}(x_0, r)$ de centro x_0 y radio r esta contenida en K y $f(x) \leq M$ para todo $x \in \overline{B}(x_0, r)$.

1) Mostrar que para todo $x \in K$

$$f(x_0) \leq f(x) + \frac{M - f(x_0)}{r} \|x - x_0\|.$$

2) Mostrar que para todo $x \in B(x_0, r)$

$$f(x) \leq f(x_0) + \frac{M - f(x_0)}{r} \|x - x_0\|.$$

3) Deducir que f es continua en x_0 .4) Mostrar que f es acotada en una vecindad de todo punto de $\text{int } K$ y deduzca que f es continua sobre $\text{int } K$.5) Muestre que f es localmente lipschitziana sobre $\text{int } K$, es decir, para todo $x \in \text{int } K$ existe $r > 0$ y $L > 0$ tal que la bola $B(x, r)$ esta contenida en K y

$$\forall x_1, x_2 \in B(x, r), \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

b) Sea K un abierto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y f una función convexa de K en $\mathbb{R}$. Muestre que f es continua sobre K y localmente lipschitziana sobre K .

P2. Funciones de penalización.

Sea $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y coerciva (i.e. $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$).

a) Muestre que para todo subconjunto K no vacío y cerrado de $\mathbb{R}^n$ existe $x_K \in K$ tal que $F(x_K) = \inf\{F(x): x \in K\}$.

b) Muestre que si F es estrictamente convexa y si K es convexo, entonces x_K es único.

c) Sea C un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de $\mathbb{R}^n$. Sea $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ convexa, tal que $\phi(x) = 0$ ssi $x \in C$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos F_n por

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad F_n(x) = F(x) + n\phi(x)$$

suponemos que F es estrictamente convexa.

1) Muestre que existe un único $x_n \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$F_n(x_n) = \inf\{F_n(x): x \in \mathbb{R}^n\}.$$

2) Estudie la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

P3. Principio variacional de Ekeland en $\mathbb{R}^n$.

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada inferiormente sobre $\mathbb{R}^n$. Sea $\epsilon > 0$ y u una solución ϵ aproximada del problema de minimización de f sobre $\mathbb{R}^n$, es decir, $f(u) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \epsilon$. Dado $\lambda > 0$ considere

$$g: x \in \mathbb{R}^n \mapsto g(x) := f(x) + \frac{\epsilon}{\lambda} \|x - u\|.$$

a) Muestre que existe $v \in \mathbb{R}^n$ minimizando g sobre $\mathbb{R}^n$. Pruebe además que v satisface:

- (i) $f(v) \leq f(u)$;
- (ii) $\|v - u\| \leq \lambda$
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(v) \leq f(x) + \frac{\epsilon}{\lambda} \|x - v\|$.

b) Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y acotada inferiormente sobre $\mathbb{R}^n$. Muestre que para todo $\epsilon > 0$ existe x_ϵ tal que $\|\nabla f(x_\epsilon)\| \leq \epsilon$.

2. Problemas Propuestos

P1. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado, no vacío y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Suponiendo que $\bar{x} \in D$, mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\bar{x}$ es una solución del problema

$$\text{mín } f(x) \text{ sujeto a } x \in D;$$

b) $\exists \beta > 0$ tal que $\bar{x}$ es una solución del problema irrestricto

$$\text{mín}(f(x) + \beta \text{dist}(x, D)), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

P2. Sean D y C conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Consideremos $\varphi(x, y)$, una función convexa en $D \times C$ tal que $\inf_{y \in C} \varphi(x, y) > -\infty$ para todo $x \in D$. Pruebe que la función $f(x) = \inf_{y \in C} \varphi(x, y)$ es convexa en D .

P3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que satisface la desigualdad siguiente:

$$f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad h > 0.$$

Pruebe:

- a) El máximo de f en un intervalo cerrado $[a, b]$ es alcanzado en a o en b .
- b) f es convexa.

Indicación: Considere $L(x) = \frac{(x-a)f(b) - (x-b)f(a)}{b-a}$ y $G(x) = f(x) - L(x)$

P4. Sea $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ el cono convexo abierto de las matrices simétricas definidas positivas de $n \times n$. Se define la función $f: \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \quad f(x, A) = \langle A^{-1}x, x \rangle$$

¿Es f una función convexa?

P5. a) Muestre que $f(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_{[i]}$ es una función convexa en x , donde $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r$, y $x_{[i]}$ es la i -ésima componente más grande de x .
b) Consideremos el polinomio trigonométrico

$$T(x, w) = x_1 + x_2 \cos w + x_3 \cos 2w + \dots + x_n \cos(n-1)w.$$

Muestre que la función

$$f(x) = - \int_0^{2\pi} \log T(x, w) dw$$

es una función convexa en $C = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x, w) > 0, 0 \leq w \leq 2\pi\}$.

P6. Considere $p, q \in \mathbb{R}^n$ dos vectores que representan distribuciones de probabilidad en $\{1, \dots, n\}$, es decir, $p_i, q_i \geq 0$ $\forall i = 1 \dots n$ y $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$. Definimos la *máxima distancia de probabilidad* d_{mp} entre p y q por:

$$d_{mp}(p, q) = \text{máx}\{|\mathbf{prob}(p, C) - \mathbf{prob}(q, C)| : C \subseteq \{1, \dots, n\}\}.$$

Aquí $\mathbf{prob}(p, C)$ es la probabilidad de C bajo la distribución p , i.e. $\mathbf{prob}(p, C) = \sum_{i \in C} p_i$.

Encuentre una expresión simple para d_{mp} , en términos de $\|p - q\|_1$ y muestre que d_{mp} es una función convexa en su dominio.