

MA57B - Optimización No Lineal. Semestre Otoño 2010

Profesor: Héctor Ramírez Auxiliar: Cristopher Hermosilla

Tarea I

Fecha de entrega: 12 de mayo de 2010

- P1.** a) La utilidad dada por una acción en la bolsa depende de un índice x de volatilidad, que puede ser positivo o negativo, y del precio y (≥ 0) que uno está dispuesto a pagar por una garantía o seguro. Dicha utilidad viene dada por la función

$$f(x, y) = x^3 - 3x - y.$$

- 1) Maximice la utilidad de la acción respetando la restricción de riesgo:

$$x + y \leq 2.$$

Para esto *debe* utilizar las condiciones de KKT y las condiciones optimales de segundo orden.

- 2) Suponga ahora que el índice de volatilidad es estrictamente positivo (i.e. $x > 0$). Si se está dispuesto a aceptar un riesgo máximo mayor, aumentándolo de 2 a 2,05. Estime directamente la nueva utilidad asociada a la acción.
- b) Considere una empresa que produce mesas de madera utilizando dos factores productivos: mano de obra y madera. Los costos estimados de dichos factores son \$ 10 por hora-hombre y \$ 6 por metro cúbico de madera. Para la producción de las mesas se considera la siguiente función de producción, donde x_1 representa las horas-hombre dedicadas y x_2 los metros cúbicos de madera utilizados:

$$h(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

- 1) Formule un modelo de minimización de costos para producir exactamente $q > 0$ mesas.
- 2) ¿Cuáles son las condiciones sobre α y β para que exista una solución al problema anterior?
- 3) Asumiendo las condiciones de la parte (b), encuentre la solución y valor óptimo de la función objetivo.
- P2.** Una empresa manufacturera necesita determinar su plan de producción. Según los estudios realizados, el beneficio unitario por producto está dado por:

Producto	Precio por unidad
P_1	$800 - x_1 - x_2$
P_2	$2000 - x_1 - 3x_2$

donde x_1 y x_2 son el número de unidades de los productos P_1 y P_2 , respectivamente. Además, para elaborar estos productos se requiere mano de obra, que denominaremos recurso 1 (R_1), y horas máquina, que será el recurso 2 (R_2). La cantidad de recursos necesarios por producto y la disponibilidad de cada recurso, se detallan en la siguiente tabla:

Producto vs. Recurso (horas/unidad)	R_1	R_2
P_1	8	7
P_2	3	6
Disponibilidad (hora/mes)	1200	2100

- a) Plantee el modelo que maximiza el beneficio total de la empresa.
- b) Utilice las condiciones de KKT para encontrar una solución factible del problema. ¿Es esta solución óptima?
- c) Suponga ahora que se tiene una disponibilidad de 1205 horas por mes del recurso 1. Estime el máximo beneficio que se obtiene de esta acción.

P3. Interior relativo de un conjunto convexo en dimensión finita.

Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert de dimensión finita, $C \subseteq X$ un convexo no vacío tal que $0 \in C$ y $C_1, C_2 \subseteq X$ dos convexos no vacíos. Consideramos las siguientes hipótesis de regularidad $(\mathcal{R})$: $0 \in \text{ri}(C_1 - C_2) \vee \text{ri}(C_1 \cap C_2) \neq \emptyset$.

a) Interior relativo.

- 1) Encuentre dos convexos $C_1 \subseteq C_2$ tales que $\text{ri } C_1 \not\subseteq \text{ri } C_2$.
- 2) Si la $\dim X = n$ y $\text{span}(C) = \text{aff}(C) = X$ (justifique la primera igualdad). Demuestre que C contiene una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de X . Deduzca que todo convexo no vacío de X tiene interior relativo no vacío.
- 3) Probar que para $\lambda \in]0, 1]$ se tiene que $\lambda \text{ri } C + (1 - \lambda) \text{cl } C \subseteq \text{ri } C$, y por lo tanto $\text{ri } C$ es un convexo que satisface $\text{cl}(\text{ri } C) = \text{cl } C$.
- 4) Sea Y otro espacio Euclidiano y $A : X \rightarrow Y$ una función lineal, demuestre que $A(\text{ri } C) \subseteq \text{ri } A(C)$.
- 5) Cuando X es un espacio en dimensión infinita, el interior relativo de un convexo puede ser vacío, por lo que la noción de interior relativo pierde su interés. Para ver esto, muestre que el kernel de una función lineal discontinua es convexo, denso en X , con interior relativo vacío. Concluya.

b) Reglas de Cálculo del Cono Tangente.

- 1) Sea $x \in C_1 \cap C_2$, pruebe que $T_{C_1 \cap C_2}(x) \subseteq T_{C_1}(x) \cap T_{C_2}(x)$. Pruebe que hay igualdad si se tiene $(\mathcal{R})$.
- 2) Si $x = (x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$, pruebe que $T_{C_1 \times C_2}(x) = T_{C_1}(x_1) \times T_{C_2}(x_2)$.
- 3) Sean $A, A_0 \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $y_0 \in \mathbb{R}^m$ tales que $Ax = A_0x + y_0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{x} \in C$, pruebe que

$$T_{A(C)}(A(\bar{x})) = \text{cl}(A_0 T_C(\bar{x})).$$

- 4) Si $(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$, pruebe que $T_{C_1 + C_2}(x_1 + x_2) = \text{cl}(T_{C_1}(x_1) + T_{C_2}(x_2))$.

Indique claramente cuando se requiere que los conjuntos C_1 y C_2 sean convexos.

c) Reglas de Cálculo del Cono Normal.

- 1) Si $x \in \text{int}(C)$, pruebe que $N_C(x) = X$.
- 2) Sea $x \in C_1 \cap C_2$, pruebe que $N_{C_1}(x) + N_{C_2}(x) \subseteq N_{C_1 \cap C_2}(x)$. Pruebe que hay igualdad si se tiene $(\mathcal{R})$.
- 3) Si $x = (x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$, pruebe que $N_{C_1 \times C_2}(x) = N_{C_1}(x_1) \times N_{C_2}(x_2)$.
- 4) Si $(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$, pruebe que $N_{C_1 + C_2}(x_1 + x_2) = N_{C_1}(x_1) + N_{C_2}(x_2)$.

P4. Weierstrass-Hilbert-Tonelli

a) Pruebe la siguiente variante del teorema visto en clases:

Teorema. Sea X un espacio de Banach reflexivo y $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semi-continua inferior (s.c.i). Si f es coercitiva y convexa, entonces existe $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = \inf_X f$. Más aún, si f es estrictamente convexa, entonces x^* es único.

Indicación: Considere una sucesión minimizante y pruebe que una función convexa, es s.c.i para la topología $\sigma(X, X^*)$ -débil si y sólo si es s.c.i para la topología fuerte.

b) Considere el espacio de Banach $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el conjunto

$$C := \left\{ x \in X : \int_0^{\frac{1}{2}} x(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t) dt = 1 \right\},$$

y la función $f(x) = \|x\|_\infty + I_C(x)$, donde $I_C(x) = 0$ si $x \in C$ e $I_C(x) = +\infty$ si $x \notin C$

- 1) Pruebe que f es una función convexa, s.c.i. y coercitiva. Muestre además que $\inf_X f = 1$.

Indicación: Considere, para $n > 1$, la sucesión:

$$x_n(t) := \begin{cases} \frac{n}{n-1} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \frac{n^2}{n-1} \left(\frac{1}{2} - t \right) & \text{si } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \\ -\frac{n}{n-1} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1 \right] \end{cases}$$

- 2) Muestre que no existe $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = \inf_X f$. ¿Contradice este hecho el teorema de Weierstrass-Hilbert-Tonelli?

P5. Sean $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ funciones derivables. Considere el problema de optimización:

$$(P) \quad \min \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x_i) : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$$

- a) 1) Argumente la existencia de una solución (P) y determine por qué tal solución cumple las condiciones necesarias de primer orden de KKT.
 2) Si $\bar{x}$ es solución de (P) , muestre que existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} f'_i(\bar{x}_i) + \bar{\lambda} &= 0 \quad \forall i \text{ tal que } \bar{x}_i > 0 \\ f'_i(\bar{x}_i) + \bar{\lambda} &\geq 0 \quad \forall i \text{ tal que } \bar{x}_i = 0 \end{aligned}$$

- b) Sean $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$ y considere $f_i(x_i) = a_i(e^{-b_i x_i} - 1)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Si $\Theta(\lambda)$ es la función dual Lagrangiana asociada a (P) , verifique que:

1) $\Theta(\lambda) = -\infty$, si $\lambda < 0$.

2) $\Theta(0) = -\sum_{i=1}^n a_i$.

3) $\forall \lambda > 0$, $\exists! \bar{x}(\lambda)$ que minimiza el Lagrangiano de (P) , $L(\cdot, \lambda)$, sobre $\mathbb{R}_+$.

- c) Utilizando la caracterización de $\bar{x}(\lambda)$, pruebe que $\forall \lambda \geq 0$:

$$\Theta(\lambda) = -\sum_{i=1}^n a_i \left[1 - \frac{\lambda}{a_i b_i} \right]^+ + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} \left[\ln \left(\frac{\lambda}{a_i b_i} \right) \right]^+ - 1 \right)$$

P6. *Elipsoide de Volumen Mínimo*

- a) Para un punto $y \in \mathbb{R}^n$ y la función $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(X) := \|Xy\|^2$, pruebe que

$$\nabla g(X) = Xyy^T + yy^T X \quad \forall X \in \mathbb{S}^n.$$

- b) Considere un conjunto $\{y^1, y^2, \dots, y^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pruebe que este conjunto genera $\mathbb{R}^n$ si y sólo si la matriz $\sum_{i=1}^m y^i (y^i)^T$ es definida positiva.

En adelante, considere que los vectores $y^1, y^2, \dots, y^m$ generan $\mathbb{R}^n$.

- c) Pruebe que el siguiente problema tiene solución:

$$(P) \quad \min \quad \ln(\det(X^{-1})) \\ \text{s.a.} \quad \|Xy^i\|^2 \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\ X \in \mathbb{S}_{++}^n$$

- d) Sea $\bar{X}$ una solución de (P) . Pruebe que el conjunto $\mathcal{E}_{\bar{X}} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|\bar{X}y\|^2 \leq 1\}$ es un elipsoide de volumen mínimo, centrado en el origen, que contiene los vectores $y^1, y^2, \dots, y^m$.

Indicación: Pruebe que si $\forall A \in \mathbb{S}_{++}^n$ entonces $\text{Vol}(\mathcal{E}_A) \propto \det A^{-1}$. Para ello encuentre una biyección de la forma

$$\phi : \mathcal{E}_A = \{y \in \mathbb{R}^n : \|Ay\|^2 \leq 1\} \rightarrow \mathcal{E}_A^* = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle A^{-1}v, v \rangle \leq 1\}$$

Considere primeros los casos en que $\{y^1, y^2, \dots, y^m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y A es una matriz diagonal.

- e) Muestre que $\bar{X}$ satisface las condiciones de Mangasarian-Fromovitz.
 f) Escriba las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker que debe satisfacer $\bar{X}$.
 g) Si $\{y^1, y^2, \dots, y^m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, muestre que $\bar{X} = I_n$ y encuentre los multiplicadores de Lagrange correspondientes.
 h) Deduzca que para toda matriz $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_{++}^n$, donde $x_i \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\det(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_n\|.$$

P7. Sea $T \in (0, +\infty)$, $N \geq 1$ y el espacio $X := \{u \in C^1([0, T], \mathbb{R}^N) : u(0) = u(T) = 0\}$ dotado de la norma

$$\|u\|_X = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\| + \sup_{t \in [0, T]} \|u'(t)\|.$$

Denotamos por $\overline{B}_X(u, r)$ la bola cerrada de centro u y radio r .

Sea $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^2 . El objetivo del problema es minimizar la función $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$J(u) = \int_0^T F(u(t), u'(t)) dt \quad \forall u \in X$$

a) 1) Sean $u, v \in X$. Demuestre que existe una constante $M > 0$ tal que $\forall h, k \in \overline{B}_X(0, 1)$ y $\forall t \in [0, T]$ se tiene

$$|\phi(t)| \leq M(\|h(t)\|^2 + \|k(t)\|^2),$$

donde $\phi(t) := F(u(t) + h(t), v(t) + k(t)) - F(u(t), v(t)) - \langle \nabla_x F(u(t), v(t)), h(t) \rangle - \langle \nabla_y F(u(t), v(t)), k(t) \rangle$

2) Suponga que F es convexa en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Muestre que $\phi(t) \geq 0$, $\forall u, v, h, k \in X$ y $t \in [0, T]$

b) 1) Muestre que J es diferenciable en X con:

$$DJ(u)(h) = \int_0^T [\langle \nabla_x F(u(t), u'(t)), h(t) \rangle + \langle \nabla_y F(u(t), u'(t)), h'(t) \rangle] dt \quad \forall u, h \in X$$

2) Muestre que J es de clase C^1 sobre X .

c) Sea $u \in X \cap C^2([0, T], \mathbb{R}^N)$

1) Muestre que la aplicación $G : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es de clase $C^1([0, T], \mathbb{R}^N)$, donde

$$G(t) = \nabla_y F(u(t), u'(t))$$

2) Muestre utilizando integración por partes que

$$DJ(u)(h) = \int_0^T [\langle \nabla_x F(u(t), u'(t)) - \frac{d}{dt}(\nabla_y F(u(t), u'(t))), h(t) \rangle] dt \quad \forall u, h \in X.$$

3) Suponga que u es un mínimo local de J sobre X . Muestre que $\forall t \in [0, T]$:

$$\nabla_x F(u(t), u'(t)) - \frac{d}{dt}(\nabla_y F(u(t), u'(t))) = 0 \quad (*)$$

4) Muestre que si F es convexa sobre $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, entonces toda solución u de $(*)$ es un mínimo global de J sobre X .

d) Sea T y U dos funciones de clase $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, y sea $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = T(y) - U(x)$$

1) Escriba la ecuación $(*)$ en función de T y U .

2) Resuelva la ecuación $(*)$ en el caso particular que $T = 1$, $N = 1$ y

$$J(u) = \int_0^1 \left[u'(t)^2 - \frac{\pi^2}{4} u(t)^2 \right] dt.$$

P8. Reglas de Wolfe

En esta pregunta se pretende estudiar un nuevo tipo de búsqueda lineal para la determinación del paso α_k en el algoritmo general de direcciones de descenso, dadas por las *reglas de Wolfe*:

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k d_k) &\leq f(x_k) + w_1 \alpha_k \nabla f(x_k)^\top d_k, \\ \nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^\top d_k &\geq w_2 \nabla f(x_k)^\top d_k, \end{aligned}$$

donde f es la función a minimizar, x_k es la iteración actual, d_k es una dirección de descenso para f en x_k , y w_1, w_2 son constantes que satisfacen $0 < w_1 < w_2 < 1$ (en la práctica $w_1 = 10^{-4}$ y $w_2 = 0,99$).

- Demuestre que si la función $h_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ (definida para $\alpha \geq 0$) es derivable y acotada inferiormente, entonces existe un paso α_k que verifica las reglas de Wolfe.
- Suponga que f es de clase $C^{1,1}$ en una vecindad de $\mathcal{V} := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$. Para $\{x_k\}_{k \geq 0}$ sucesión generada por algoritmo general de direcciones de descenso con un paso α_k que satisface las reglas de Wolfe, demuestre que se cumple la condición de Zoutendijk.

P9. Trayectorias de Máximo descenso

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert dimensión finita y $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa que cumple las siguientes hipótesis de regularidad:

$$(h_\Phi) \quad \begin{cases} \inf \{\Phi(x) : x \in H\} > -\infty \\ \Phi : H \rightarrow \mathbb{R} \text{ es de clase } C^1 \\ \nabla \Phi \text{ es lipschitz sobre acotados de } H \end{cases}$$

El siguiente sistema dinámico puede interpretarse como una versión continua del método del gradiente:

$$(SD) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\nabla \Phi(x(t)), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \in H \end{cases}$$

- Muestre que $\forall x_0 \in H$, $\exists! x(\cdot) \in C^1([0, +\infty); H)$ solución del problema de Cauchy (SD) . Más aún, el mapeo $t \mapsto \Phi(x(t))$ es decreciente con $\frac{d}{dt} \Phi(x(t)) = -\|\dot{x}(t)\|^2$ y $x(\cdot) \in L^2([0, +\infty); H)$.
- Pruebe que si $x(\cdot)$, la solución de (SD) encontrada en (a), es acotada, entonces $\dot{x}(t) \rightarrow 0$.
Indicación: utilice el resultado: Si $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ es integrable y globalmente lipschitz, entonces $\varphi(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.
- Pruebe que $\Phi(x(t)) \rightarrow \inf \{\Phi(x) : x \in H\}$ cuando $t \rightarrow +\infty$.
- Si $\operatorname{argmin} \Phi \neq \emptyset$, muestre que para cada $x_0 \in H$, existe $x_\infty \in \operatorname{argmin} \Phi$ tal que si $x(t)$ es solución de (SD) entonces $x(t) \rightarrow x_\infty$.
Indicación: Muestre que $\forall z \in \operatorname{argmin} \Phi$ el $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z - x(t)\|$ existe y es finito.