



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía #3:
Ecuaciones en derivadas parciales.

Profesor : Juan Dávila
Auxiliar : Emilio Vilches
Curso : MA56B

Inyecciones de Sobolev y compacidad.

1. Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ de clase C^1 .

a) Demuestre que existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que para toda $u \in C^1(\overline{\Omega})$ se tiene

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

b) Demuestre que el operador traza $T: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ es compacto.

2. En este problema se quiere demostrar que las inclusiones de Sobolev son óptimas. Lo haremos en dos casos. Suponemos que Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$ y que tiene frontera de clase C^1 .

a) Sea $p < n$. Muestre que existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u \notin L^q(\Omega)$ con $q > \frac{np}{n-p}$.

Indicación: Suponga que $0 \in \Omega$ y considere una función u tal que $u(x) = |x|^\lambda$ si $x \in B(0, R) \subset \Omega$ y elija λ adecuado.

b) Sea $kp < n$. Muestre que $W^{k,p}(\Omega)$ no está contenido en $L^q(\Omega)$ si $q > \frac{np}{n-kp}$.

c) Sea $p = n > 1$. Muestre que $W^{1,p}(\Omega)$ no está contenido en $L^\infty(\Omega)$.

Indicación: Considere la función u dada por $u(x) = \log \left(\log \left(\frac{4R}{|x|} \right) \right)$ si $x \in B(0, R) \subset \Omega$.

3. Suponga que Ω es acotado. Demuestre que si $0 < \alpha < \beta \leq 1$ entonces la inclusión de $C^{0,\beta}(\Omega)$ en $C^{0,\alpha}(\Omega)$ es compacta. ¿Qué puede decir de la inclusión de $C^{1,\beta}(\Omega)$ en $C^{1,\alpha}(\Omega)$?

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado (no necesariamente de frontera regular). Demuestre que $H_0^{k+1}(\Omega)$ está compactamente incluido en $H^k(\Omega)$.

Formulación variacional y regularidad.

1. Consideremos la siguiente ecuación diferencial elíptica de segundo orden:

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} u_{x_j}) + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu = f \quad \text{en } \Omega$$
$$u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

donde

- (i) $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ con $\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$.
- (ii) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$.
- (iii) $b_j \in L^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $\text{div } b = 0$ en Ω .

Pruebe que para todo $f \in L^2(\Omega)$, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema.

2. (*El bi-Laplaciano.*)

Sea Ω un abierto acotado de frontera suave de $\mathbb{R}^N$; sea $f \in L^2(\Omega)$. Considere el problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

- a) Muestre que la formulación variacional de (1) es

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2)$$

- b) Muestre que (2) admite una única solución $u \in H_0^2(\Omega)$. Pruebe que $u \in H^4(\Omega)$.

- c) ¿Cual es la mayor dimensión que asegura u sea una función continua?. Para esta dimensión ¿Cual es la máxima regularidad que tiene u ?

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular. Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\partial\Omega)$. Considere el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

- a) Escribir la formulación variacional de (3).

- b) Mostrar que una condición necesaria para que (3) admita solución es

$$\int_{\Omega} f dx = - \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma(x). \quad (4)$$

¿Si (3) tiene solución, es ésta única?.

- c) Sea X el subespacio de funciones de $H^1(\Omega)$ a media nula sobre Ω . Mostrar que $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma sobre X equivalente a la norma $H^1(\Omega)$.

- d) Bajo la hipótesis (4), describir todas las soluciones del problema (3).

4. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$. Pruebe que existe una sucesión $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \nearrow \infty$ de autovalores del problema con autofunciones $u_k \in H^1(\Omega)$ donde $u_1 = \text{cte}$ y $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y una base ortogonal de $H^1(\Omega)$.

5. (*Condición de Robin.*)

Considere el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

Discuta la existencia y unicidad de soluciones débiles para el problema (5) cuando $f \in L^2(\Omega)$.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$\Omega = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r < R, 0 < \theta < \Theta\}$$

con $0 < R < +\infty$ y $0 < \Theta < 2\pi$. Definimos

$$\Gamma_0 = \{(R, \theta) \mid 0 < \theta < \Theta\},$$

$$\Gamma_1 = \{(r, 0) \mid 0 \leq r < R\},$$

$$\Gamma_2 = \{(r, \Theta) \mid 0 \leq r < R\},$$

Para $k \geq 1$ considere el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{en } \Omega \\ u &= \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\Theta}\right) && \text{sobre } \Gamma_0 \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{aligned} \quad (6)$$

a) Pruebe que existe una única solución débil de (6) sobre $H^1(\Omega)$, dada por la fórmula

$$u(r, \theta) = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\Theta}} \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\Theta}\right).$$

b) Pruebe que si $k = 1$ y $\pi < \Theta$, entonces ∇u es no acotado en 0 y si $k \geq 2$ o $\pi \geq \Theta$, entonces el gradiente ∇u es continuo 0.

7. a) Considere un dominio acotado, con frontera suave, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y suponga que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Si $f \in H^2(\Omega)$. ¿Qué regularidad tiene u ?

b) En las condiciones anteriores, pero suponiendo ahora que $\Omega \subset \mathbb{R}^5$. ¿Cuál es el menor valor de m para que u sea solución clásica, es decir de clase $C^2(\Omega)$? y ¿para que $u \in C^{3,1/3}$?

c) Demuestre que si $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ satisface

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{en } \Omega$$

en el sentido débil, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$. (Formalice el proceso iterativo necesario.)

8. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ una solución débil a soporte compacto de la ecuación semilineal

$$-\Delta u + c(u) = f \quad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

donde $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, con $c(0) = 0$ y $c' \geq 0$. Pruebe que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

9. Sea $u \in H^1(\Omega)$ una solución débil acotada de

$$-\sum_{i,j=1}^n (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Sea $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y convexa, y defina $w = \phi(u)$. Muestre que w es una subsolución débil; esto es; $B[w, v] \leq 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$.

10. (Lema de Cea)

Se intenta construir una solución aproximada del siguiente problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

Para esto, se toma un subespacio de dimensión finita $V \subset H_0^1(\Omega)$, $V = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ y se define la *solución aproximada* $\tilde{u} \in V$ como la solución del problema

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \nabla \phi_i dx = \int_{\Omega} f \phi_i dx \quad i = 1, \dots, n.$$

a) Pruebe que $\tilde{u}$ está bien definida (es decir, existe una única solución del problema aproximado).

b) Sea u una solución débil de (8). Pruebe la siguiente *estimación del error*:

$$\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in V} \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

es decir, el método da la "mejor aproximación" que permite el subespacio V .