

MA56B EDP. Semestre 2010-01

Profesor: Juan Dávila Auxiliar: Emilio Vilches

Auxiliar 8

24 de Mayo de 2010

1. Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de $H^1(\Omega)$ que converge a u en $L^2(\Omega)$ y tal que, para cada $j \in \{1, \dots, N\}$, la sucesión $(D_j u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a v_j en $L^2(\Omega)$. Demuestre que $u \in H^1(\Omega)$, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a u en $H^1(\Omega)$ y que, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$, $v_j = D_j u$.
2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Demuestre que $\forall u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq 4\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Indicación: Note que

$$u^4(x, y) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} u^2(x, y) \cdot \max_{y \in \mathbb{R}} u^2(x, y).$$

3. Sea Ω un abierto acotado con $\partial\Omega$ suave.

a) Pruebe la desigualdad de interpolación:

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|D^2u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pruebe esta desigualdad si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.*Indicación:* Considere sucesiones $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega) \rightarrow u$ en $H_0^1(\Omega)$ y $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow u$ en $H^2(\Omega)$.

b) Demuestre la desigualdad de Poincaré:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)}.$$

Concluya que $\|Du\|_{L^2(\Omega)}$ define una norma equivalente a la norma de $H_0^1(\Omega)$.c) Muestre que $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ define una norma equivalente a la norma de $H_0^2(\Omega)$.d) Sea u una solución suave de la ecuación del calor

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 & \text{en} & \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u &= 0 & \text{en} & \quad \partial\Omega \times [0, \infty) \\ u &= g & \text{en} & \quad \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

Pruebe que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\tilde{C}t} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$