MA56B EDP. Semestre 2010-01
Profesor: Juan Dávila **Auxiliar:** Emilio Vilches

Auxiliar 7

11 de Mayo de 2010

1. Demuestre que el teorema de la traza no es válido si $\partial\Omega$ no es regular.
   Indicación: Considere la función $v(x,y) = x^\alpha$, el abierto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < 1, 0 < y < x^r\}$ y r adecuado.

2. Demuestre que el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es separable si $1 \leq p < \infty$ y reflexivo si $1 < p < \infty$.

3. Sea $\Omega = [-L, L] \times [0, \ell] \subset \mathbb{R}^2$ y $\Gamma_a = [-L, L] \times \{a\}$ con $a \in [0, \ell]$. Demuestre que existe una aplicación lineal continua $\gamma_0^a \colon H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_a)$ tal que $\gamma_0^a(u) = u|_{\Gamma_a}$ para $u \in C^1(\overline{\Omega})$.
   Si consideramos $\gamma_0^a \colon H^1(\Omega) \to L^2([-L, L])$ demuestre que para todo $u \in H^1(\Omega)$ la función $\psi \colon [0, \ell] \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(a) = \|\gamma_0^a(u)\|_{L^2([-L,L])}$ es continua.

4. Sea Ω un abierto acotado con borde $\partial\Omega$ de clase C^1. Demuestre que

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) \colon \gamma_0 u = \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, n \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

   Demuestre que $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ define una norma equivalente a la norma de $H_0^2(\Omega)$.
   Indicación: Use la desigualdad de Poincaré:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \||Du|\|_{L^2(\Omega)}$$