MA56B EDP. Semestre 2010-01
Profesor: Juan Dávila **Auxiliar:** Emilio Vilches

Guía # 2

15 de mayo de 2010

P1. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$. Definamos

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1 \text{ si } x_1 > 0,\ |x_2| < x_1 \\ 1 + x_1 \text{ si } x_1 < 0,\ |x_2| < -x_1 \\ 1 - x_2 \text{ si } x_2 > 0,\ |x_1| < x_2 \\ 1 + x_2 \text{ si } x_2 < 0,\ |x_1| < -x_2. \end{cases}$$

¿ para que $p \in [1, \infty]$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

P2. *a)* Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq +\infty$. Demuestre que las siguientes propiedades son equivalentes:

1) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
2) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $i = 1, \ldots, N$ se tiene

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\phi\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo abierto $U \subset\subset \Omega$ y todo $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < \text{dist}(U, \Omega^c)$ se tiene

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(U)} \leq C|h|,$$

donde $\tau_h u$ esta dada por $\tau_h u(x) = u(x + h)$.

Además, se puede tomar $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ en 2) y 3).

b) Pruebe que si $\|\tau_h u - u\|_{L^1(U)} \leq C|h|$ para todo $0 < |h| < \frac{1}{2}\text{dist}(U, \partial\Omega)$, no necesariamente sigue que $u \in W^{1,1}(U)$.

P3. Pruebe la desigualdad de interpolación:

$$\|Du\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}^{1/2} \|D^2\|_{L^2}^{1/2} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Suponga que Ω es acotado y $\partial\Omega$ es suave, pruebe esta desigualdad si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
Indicación: Considere sucesiones $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega) \to u$ en $H_0^1(\Omega)$ y $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \to u$ en $H^2(\Omega)$.

P4. *a)* Integrando por partes pruebe que

$$\|Du\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}^{1/2} \|D^2 u\|_{L^p}^{1/2}$$

para $2 \leq p < \infty$ y toda $u \in C_0^\infty(\Omega)$.
Indicación: $\int_\Omega |Du|^p = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i} u_{x_i} |Du|^{p-2} dx$.

b) Pruebe que

$$\|Du\|_{L^{2p}} \leq C\|u\|_{L^\infty}^{1/2} \|D^2 u\|_{L^p}^{1/2}$$

para $1 \leq p < \infty$ y toda $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

P5. De un ejemplo de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una función $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, tal que u no es Lipschitz continua sobre Ω.
Indicación: Considere Ω como el disco unitario en $\mathbb{R}^2$ menos el trazo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), y = 0\}$.

P6. a) Sea f una función continua en el intervalo $[0,a]$. Demuestre que

$$\int_0^a \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(s)ds \right|^2 dx \le C \int_0^a |f(x)|^2 dx,$$

donde C es una constante independiente de f.

b) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con $\partial\Omega$ de clase C^1. Demuestre la desigualdad de Hardy: Existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega \left| \frac{u(x)}{d(x)} \right|^2 dx \le C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx,$$

donde

$$d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \inf\{|x-y| \colon y \in \partial\Omega\}.$$

c) Muestre que para $n \ge 3$ existe una constante C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Indicación: $|Du + \lambda \frac{x}{|x|^2} u|^2 \ge 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

P7. Para $\alpha > 0$ y $\Omega = B(0,1)$. Muestre que existe una constante C, dependiendo solo de n y α, tal que

$$\int_\Omega u^2 dx \le C \int_\Omega |Du|^2 dx,$$

siempre que

$$|\{x \in \Omega \colon u(x) = 0\}| \ge \alpha, \quad u \in H^1(\Omega).$$

P8. Para $m \ge 2$, $1 \le q \le m/2$ y $u \in H_0^{2,\frac{m}{q+1}} \cap L^{\frac{m}{q-1}}(\Omega)$ demuestre que $u \in H^{1,\frac{m}{q}}(\Omega)$ y

$$\|Du\|_{L^{\frac{m}{q}}(\Omega)} \le C \|u\|_{L^{\frac{m}{q-1}}(\Omega)} \|D^2 u\|_{L^{\frac{m}{q+1}}(\Omega)}.$$

Indicación: Para $p = \frac{m}{1}$,

$$|D_i u|^p = D_i(u D_i u |D_i u|^{p-2}) - u D_i(D_i u |D_i u|^{p-2}).$$

El primer término del lado derecho desaparece después de integración sobre Ω para $u \in C_0^\infty(\Omega)$, y para el segundo, utilice la formula

$$D_i(v|v|^{p-2}) = (p-1)(D_i v)|v|^{p-2}.$$

Finalmente utilice la siguiente versión de la desigualdad de Hölder

$$\|u_1 u_2 u_3\|_{L^1(\Omega)} \le \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|u_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \|u_3\|_{L^{p_3}(\Omega)}$$

para $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$.

P9. Dé una caracterización en términos de trazas del espacio $W_0^{2,p}$ en el caso en que Ω es acotado y suave.

P10. Sea Ω acotado, con borde C^1. Muestre que una función $u \in L^1(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ no tiene traza sobre $\partial\Omega$. Más precisamente, pruebe que no existe un operador linear acotado

$$T^p \colon L^p(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que $Tu = u|_{\partial\Omega}$ cuando $u \in C(\overline{\Omega}) \cap L^p(\Omega)$.

P11. a) Suponga que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera de clase C^1. Sea $u \in H^1(\Omega)$ y definamos $\overline{u} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in \Omega \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Pruebe que $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $u \in H_0^1(\Omega)$.

b) Pruebe que $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

P12. Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ de clase C^1.

a) Demuestre que existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que para toda $u \in C^1(\overline{\Omega})$ se tiene

$$\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

b) Demuestre que el operador traza $T \colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es compacto.

P13. Suponga que Ω es acotado y que existe un campo vectorial α tal que $\alpha \cdot \nu \geq 1$ en $\partial\Omega$, donde ν denota la normal exterior unitaria. Suponga que $1 \leq p < \infty$.
Usando el teorema de Gauss-Green a $\int_{\partial\Omega} |u|^p \alpha \cdot \nu dS$, demuestre la desigualdad

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p dS \leq C \int_{\Omega} |Du|^p + |u|^p dx \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}).$$

P14. Verifique que si $n > 1$, la función no acotada $u = \log\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)$ pertenece a $W^{1,n}(\Omega)$, para $\Omega = B(0,1)$.

P15. En este problema se quiere demostrar que las inclusiones de Sobolev son óptimas. Lo haremos en dos casos. Suponemos que Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$ y que tiene frontera de clase C^1.

a) Sea $p < n$. Muestre que existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u \notin L^q(\Omega)$ con $q > \frac{np}{n-p}$.
Indicación: Suponga que $0 \in \Omega$ y considere una función u tal que $u(x) = |x|^\lambda$ si $x \in B(0,R) \subset \Omega$ y elija λ adecuado.

b) Sea $kp < n$. Muestre que $W^{k,p}(\Omega)$ no está contenido en $L^q(\Omega)$ si $q > \frac{np}{n-kp}$.

c) Sea $p = n > 1$. Muestre que $W^{1,p}(\Omega)$ no está contenido en $L^\infty(\Omega)$.
Indicación: Considere la función u dada por $u(x) = \log\left(\log\left(\frac{4R}{|x|}\right)\right)$ si $x \in B(0,R) \subset \Omega$.