

MA56B EDP. Semestre 2010-01

Profesor: Juan Dávila Auxiliar: Emilio Vilches

**Auxiliar 5**

27 de Abril de 2010

**P1.** *Problemas con el dominio.*

Sea  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1, 0 < y < 1\}$ . Muestre que la función definida por

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

pertenece a  $W^{1,p}(\Omega)$ , pero si  $\epsilon > 0$  es suficientemente pequeño no existe  $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$  tal que

$$\|u - \phi\|_{1,p,\Omega} < \epsilon.$$

**P2.** a) Pruebe que si  $u \in W^{1,p}(a, b)$  para algún  $p \in (1, +\infty)$ , entonces,  $u$  es igual a una función absolutamente continua y  $u' \in L^p(a, b)$ .

b) Pruebe que si  $u \in W^{1,p}(0, 1)$  para algún  $p \in (1, +\infty)$ , entonces

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |u'|^p \right)^{1/p} \quad \text{para } x \in [0, 1] \quad \text{c.t.p.}$$

c) Pruebe que a) no vale si  $n \neq 1$ .

*Indicación:* Considere la función  $u(x) = |x|^{-\alpha}$  en  $B(0, 1)$ .

**P3.** a) Sea  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida como:

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Obviamente  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ . Demuestre que  $u$  no posee derivada débil con respecto a  $x$ .

b) Sea  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable y  $M, N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables. Definimos

$$u(x, y) = \begin{cases} M(x, y) & \text{si } x < r(y) \\ N(x, y) & \text{si } x \geq r(y) \end{cases}$$

Dé condiciones para  $M, N$  y  $r$  para que  $u$  sea derivable con respecto a  $x$  en el sentido débil.