MA56B EDP. Semestre 2010-01
Profesor: Juan Dávila **Auxiliar:** Emilio Vilches

Auxiliar 4

20 de Abril de 2010

P1. Denotamos por ϕ la solución fundamental del Laplaciano en $\mathbb{R}^N$:

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & \text{si N=2,} \\ \frac{1}{N\alpha_N(N-2)}\frac{1}{|x|^{N-2}} & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

(a) Pruebe la siguiente afirmación: si u es una función armónica en $B(0,1)\setminus\{0\}$ y

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{\phi(x)} = 0$$

entonces u se puede extender de manera armónica a $B(0,1)$.

(b) Demuestre que si u es una función armónica en $B(0,1)\setminus\{0\}$ y existe $C \geq 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C\phi(x) \quad \text{para } 0 < |x| \leq 1/2,$$

entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ y v armónica en $B(0,1)$ tal que

$$u = \alpha\phi + v \quad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}.$$

Solución.

(a) Podemos suponer que $u \in C(\overline{B(0,1)} \setminus \{0\})$ considerando la función $\tilde{u}(x) = u(x/2)$ con $x \in B(0,1) \setminus \{0\}$.

Denotemos por u_0 la función armónica en $B(0,1)$ tal que $u_0 = u$ en $\partial B(0,1)$, que existe por la fórmula de Poisson. Definamos $v = u - u_0$. Entonces $v \in C(\overline{B(0,1)} \setminus \{0\})$, v es armónica en $B(0,1) \setminus \{0\}$ y satisface

$$\lim_{x \to 0} \frac{v(x)}{\phi(x)} = 0. \tag{1}$$

Probaremos que $v = 0$ en $B(0,1) \setminus \{0\}$. Para esto fijemos $\epsilon > 0$. Por el límite (1) existe $r_0 > 0$ tal que

$$|v(x)| \leq \epsilon \phi(x) \quad \text{para } 0 < |x| \leq r_0. \tag{2}$$

Entonces la función $v - \epsilon\phi$ es armónica en el anillo abierto $A = \{x : r_0 < |x| < 1\}$, es continua en $\overline{A}$. En la frontera interior de A se tiene $v - \epsilon\phi \leq 0$ por (2) y en la frontera exterior $v - \epsilon\phi \leq 0$ porque $v = 0$ y $\phi \geq 0$ en esa región. Por el principio del máximo concluimos que $v - \epsilon\phi \leq 0$ en A. Como $v - \epsilon\phi \leq 0$ también en $0 < |x| \leq r_0$ deducimos que $v - \epsilon\phi \leq 0$ en $B(0,1) \setminus \{0\}$. Haciendo $\epsilon \to 0$ vemos que $v \leq 0$ en $B(0,1) \setminus \{0\}$. Cambiando v por $-v$ se obtiene la desigualdad opuesta, lo que prueba la afirmación $v = 0$ en $B(0,1) \setminus \{0\}$.

(b) Similarmente al problema anterior podemos suponer que $u \in C^1(\overline{B(0,1)} \setminus \{0\})$ y, restando un función armónica apropiada, que $u = 0$ en $\partial B(0,1)$. Escribamos $\phi_0 = \phi$ si $N = 2$ y $\phi_0 = \phi - 1/(N\alpha_N(N-2))$ si $N \geq 3$, de modo que $\phi_0 = 0$ en $\partial B(0,1)$. Consideremos

$$\lambda = \inf\{\beta \in \mathbb{R} : u \leq \beta\phi_0 \quad \text{en } B(0,1) \setminus \{0\}\}.$$

Entonces λ está bien definido y es finito, porque por hipótesis existe al menos un β tal que $u \leq \beta\phi_0$ en $B(0,1) \setminus \{0\}$ y el conjunto de tales β es acotado inferiormente.

Si existe $x \in B(0,1) \setminus \{0\}$ tal que $u(x) = \lambda\phi_0(x)$ entonces, aplicando el principio del máximo fuerte a $\lambda\phi_0 - u \geq 0$ deduciríamos que $\lambda\phi_0 - u \equiv 0$ en $B(0,1) \setminus \{0\}$ y esto terminaría la demostración.

Supongamos entonces que para todo $x \in B(0,1) \setminus \{0\}$ se tiene $u(x) < \lambda\phi_0(x)$. Por definición de λ, para todo entero $n \geq 1$ debe existir $x_n \in B(0,1) \setminus \{0\}$ tal que $u(x_n) \geq (\lambda - 1/n)\phi_0(x_n)$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $x_n \to x_0$ cuando $n \to +\infty$, donde $x_0 \in \overline{B(0,1)}$.

El caso $x_0 \in B(0,1) \setminus \{0\}$ no puede darse, porque entonces, por continuidad, $u(x_0) = \lambda\phi_0(x_0)$ y estamos suponiendo que eso no ocurre.

Supongamos que $x_0 \in \partial B(0,1)$. Veremos que esto implica que

$$\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$$

lo que contradiría el lema de Hopf. Escribamos $\hat{x}_n = \frac{x_n}{|x_n|}$. Por el teorema del valor medio

$$(u - \lambda\phi_0)(\hat{x}_n) - (u - \lambda\phi_0)(x_n) = \langle \nabla(u - \lambda\phi_0)(y_n), \hat{x}_n - x_n \rangle$$

con $y_n = x_n + \tau_n(\hat{x}_n - x_n)$ y $\tau_n \in [0,1]$. Notemos que

$$0 = (u - \lambda\phi_0)(\hat{x}_n)$$

y

$$(u - \lambda\phi_0)(x_n) \geq -\frac{1}{n}\phi_0(x_n)$$

Deducimos que

$$\langle \nabla(u - \lambda\phi_0)(y_n), \frac{\hat{x}_n - x_n}{|\hat{x}_n - x_n|} \rangle \leq \frac{1}{n} \frac{\phi_0(x_n)}{|\hat{x}_n - x_n|}$$

Hacemos $n \to +\infty$, notando que $\frac{\phi_0(x_n)}{|\hat{x}_n - x_n|}$ se mantiene acotada, pues

$$\frac{\phi_0(x_n)}{|\hat{x}_n - x_n|} = \frac{\phi_0(x_n) - \phi_0(\hat{x}_n)}{|\hat{x}_n - x_n|}$$

y ϕ_0 es suave fuera del origen. Se concluye que

$$\langle \nabla(u - \lambda\phi_0)(y_n), x_0 \rangle \leq 0$$

que es lo mismo que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x_0) \leq 0.$$

Esto contradice el lema de Hopf, que aplicado a esta situación implica

$$\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Luego tenemos que $x_0 = \lim_{n \to +\infty} x_n = 0$. Escribamos $r_n = |x_n|$. Asi $r_n > 0$ y $r_n \to 0$. Definamos $v = \lambda \phi_0 - u$. Entonces $v \geq 0$ en $B(0,1) \setminus \{0\}$ y es armónica en esta región. Tenemos que

$$v(x_n) \leq \frac{1}{n} \phi_0(x_n).$$

Veremos que

$$\sup_{|x|=r_n} \frac{v(x)}{\phi_0(x)} \leq \frac{C}{n}$$

con C independiente de n, que es equivalente a

$$\sup_{|x|=r_n} v(x) \leq \frac{C}{n} \phi_0(x_n)$$

porque ϕ_0 es radial. En efecto, consideremos $\tilde{v}_n(x) = v(r_n x)$ con $0 < |x| < 1/r_n$. Entonces podemos aplicar la desigualdad de Harnack a $\tilde{v}_n$. Con $K = \{x : |x| = 1\}$ tenemos que

$$\sup_K \tilde{v}_n \leq C \inf_K \tilde{v}_n \leq C \tilde{v}_n(x_n/r_n) = C v(x_n)$$

con C independiente de n (siempre que $r_n \leq 1/2$, lo que se puede suponer para n grande). Concluimos que

$$\sup_{|x|=r_n} v(x) \leq C v_(x_n) \leq \frac{C}{n} \phi_0(x_n).$$