

MA56B EDP. Semestre 2010-01

Profesor: Juan Dávila Auxiliar: Emilio Vilches

Auxiliar 3

13 de Abril de 2010

P1. Método de energía.a) Consideremos el problema: Encontrar $u \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ tal que

$$u_t - \Delta u = f, \quad \text{en } \Omega_T \quad (1)$$

$$u = g \text{ en } \partial_P \Omega_T \quad (2)$$

$$(3)$$

Muestre que (1) tiene a lo más una solución.

Indicación: Pruebe que si h es la resta de dos soluciones de (1), entonces $e(t) = \int_{\Omega} h^2(s) ds$ decrece en el tiempo.

b) Considere ahora el problema:

$$u_t - \Delta u = f, \quad \text{en } \Omega_T \quad (4)$$

$$u = g \text{ en } \partial \Omega_T \times [0, T] \quad (5)$$

$$u(x, T) = u_T(x) \quad (6)$$

Pruebe que si $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ es una solución de (2), entonces u es única.*Indicación:* Basta probar que $e(t)$ es nula en $[0, T]$. Por contradicción, pruebe que $e'(t)^2 \leq e(t)e''(t)$ y demuestre que $f(t) = \log e(t)$ es convexa en un cierto intervalo abierto.**P2.** Sea $\Omega = \mathbb{R}^n$ y supongamos que

$$u_t - \Delta u = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad (7)$$

$$u = g \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \quad (8)$$

$$u(x, t) \leq M e^{\lambda |x|^2} \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times [0, T] \quad \text{para } M, \lambda > 0, \quad (9)$$

$$(10)$$

Demuestre que

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Indicación: Considere primero el caso $T < \frac{1}{4\lambda}$ y tome $\epsilon > 0$ tal que $4\lambda(T + \epsilon) < 1$. Para $y \in \mathbb{R}$ y $\mu > 0$ defina la función

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$