

Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Guía C1 Análisis Funcional

Profesor: Manuel del Pino

Auxiliares: Gonzalo Contador, Andrés Zuñiga.

P1. El propósito de este problema es mostrar que en l^1 la convergencia débil implica la convergencia fuerte (en la norma usual de l^1). Para ello, considere una sucesión $x_n \rightharpoonup 0$ y siga los siguientes pasos:

a) Suponga que $\|x_n\| \not\rightarrow 0$. Pruebe que, dado $\varepsilon > 0$, existe una subsucesión x_{n_k} y una secuencia de números enteros $1 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 \dots$ tales que

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sum_{j < s_k} x_{n_k}(j) < \frac{\varepsilon}{5} \wedge \sum_{j > t_k} x_{n_k}(j) < \frac{\varepsilon}{5}$$

Hint: Utilice la convergencia débil de x_n en los “vectores canónicos” de l^∞

b) Defina $f: l^1 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(j) = \begin{cases} \text{signo}(x_{n_k}(j)) & s_k \leq j \leq t_k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Pruebe que $f \in l^\infty$ y que $\|f\|_\infty \leq 1$.

c) Pruebe que $\forall k \in \mathbb{N} : |f(x_{n_k})| > \frac{\varepsilon}{5}$ y concluya que $f(x_n) \not\rightarrow 0$.

d) Concluya el resultado deseado: si $x_n \rightharpoonup x \in l^1$, entonces $x_n \rightarrow x$.

P2. Sean X, Y espacios normados. Sea $T: X \rightarrow Y$ lineal que satisface

$$x_n \rightharpoonup 0 \Rightarrow Tx_n \rightarrow 0$$

Pruebe que si X es reflexivo, entonces T es continua.

P3. Sea E Banach y $B: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ un operador bilineal en $E \times E$, tal que las aplicaciones traza definidas en E son continuas, esto es, para $x, y \in E$ fijos, son continuas

$$T_x(z) := B(x, z)$$

$$S_y(w) := B(w, y)$$

a) Pruebe que existe $C > 0$ tal que $\forall x, y \in E$ se verifica $B(x, y) \leq C \|x\| \|y\|$

Hint: Podría ser útil aplicar uno de los corolarios de Banach-Steinhaus a la aplicación $\Lambda_x : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida para $x \neq 0 \in E$ fijo como

$$\Lambda_x(y) := \frac{B(x, y)}{\|x\|}$$

b) Pruebe que B es continua en $(0, 0)$.

c) Concluya que B es continua.

P4. Considere $L^2([0, 1])$ como un subespacio de $L^1([0, 1])$ (considerando la Medida de Lebesgue, que es finita y por ende verifica la inclusión). Considere la secuencia de conjuntos:

$$M_n := \{f \in L^2 : \int |f|^2 < n\}$$

a) Pruebe que M_n es cerrado en L^1 (Recuerde el *Lema de Fatou*: $\int \liminf f_n < \liminf \int f_n$, y que la convergencia en norma en L^1 implica la convergencia puntual de una subsucesión)

b) Pruebe que M_n tiene interior vacío en L^1 .

c) ¿Contradice este resultado el Lema de Baire? Fundamente.

P5. Sea E Banach y $T \in \mathcal{L}(E, l^1)$ sobreyectiva. Muestre que T es invertible por la derecha.

P6. Sea E Banach, x_n sucesión convergente a $x \in E$, y $L_n \in E'$ tal que $L_n \xrightarrow{*} L$. Pruebe que si E es reflexivo, entonces $L_n(x_n) \rightarrow L(x)$

P7. Se pide demostrar la no metrizabilidad de la topología débil para un espacio de Banach E de dimensión infinita. Para ello, suponga por absurdo que existe $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ métrica que induce la topología $\sigma(E; E')$, y considere V_k una vecindad del 0 en la topología débil tal que $\forall k$

$$V_k \subseteq \{x \in E : d(x, 0) < \frac{1}{k}\}$$

a) Muestre que en E' existe una sucesión de funciones f_n tal que todo elemento de E' puede expresarse como combinación lineal finita de estas.

b) Deduzca que E' es de dimensión finita

c) Concluya

P8. Sea F Banach y E topológico. Sean $u, v : E \rightarrow F$ continuas para la topología débil de F .

a) Pruebe que $z := u + v$ es continua para la topología débil de F .

b) Suponga que una de las aplicaciones es continua en la topología fuerte de F . Pruebe que u es continua para la topología débil de F .

P9. Sea K métrico compacto de cardinalidad infinita. Definimos $C(K)$ el espacio de las funciones continuas sobre K a valores reales, dotado de la norma del supremo. Pruebe que $C(K)$ no es reflexivo. Para ello, considere una sucesión fuertemente convergente $a_n \longrightarrow a$ en K y defina $L : C(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$L(f) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(a_n)}{2^n}$$