Control y Optimización de Bioreactores

Clase 2

Salomé Martínez[1] Héctor Ramírez C.[1]

[1]DIM & CMM, Universidad de Chile, Santiago de Chile

Curso MA45C: Ecología Matemática 2010

Planificación

Quimiostato o Bioreactor en Modo Continuo

Consideremos el Quimiostato o bioreactor el modo continuo ($Q_{in} = Q_{out} = Q$ constante, V no varía y por lo tanto $D = Q_{in}/V$ es constante) con n especies.

$$\begin{cases} \dot{s} &= D(1-s) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i(s)x_i, \\ \dot{x}_1 &= [\mu_1(s) - D]x_1, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= [\mu_n(s) - D]x_n, \end{cases}$$

donde $(s, x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D} := \mathbb{R}^{n+1}_{++}$.

Equilibrios del Quimiostato con n Especies

Los equilibrios del sistema vienen dados por:

1. $x_i^* = 0$ o bien $\mu_i(s^*) = D$ para todo $i = 1, ..., n$, y
2. $\sum_{i=1}^n x_i^* = 1 - s^*$.

La segunda situación en (1) para más de una especie (digamos i y j) implica:

$$\mu_i(s^*) = \mu_j(s^*) = D,$$

lo cual puede ser poco probable.

Equilibrios del Quimiostato con n Especies

Los equilibrios del sistema vienen dados por:

1. $x_i^* = 0$ o bien $\mu_i(s^*) = D$ para todo $i = 1, ..., n$, y
2. $\sum_{i=1}^n x_i^* = 1 - s^*$.

La segunda situación en (1) para más de una especie (digamos i y j) implica:

$$\mu_i(s^*) = \mu_j(s^*) = D,$$

lo cual puede ser poco probable.

Planificación de la Charla

Principio de Exclusión Competitiva

- Un resultado central en la teoría del quimiostato es el Principio de Exclusión Competitiva. (Hardin '60)
- Este establece que, cuando las funciones de crecimiento μ_i's de los microorganismos son crecientes, a lo más una especie sobrevive al competir por un único recurso.

Es decir:

Teorema

Sean μ_i's crecientes. Para $D > 0$ fijo, definamos las concentraciones de quiebre como:

$$\lambda_i = \lambda_i(D) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \lim_{s\to\infty} \mu_i(s) \leq D, \\ \bar{s}_i \text{ tal que } \mu_i(\bar{s}_i) = D & \text{si no.} \end{cases}$$

Supongamos que $\min_i \lambda_i < s_{in} = 1$ y que existe un único j t.q. $\lambda_j = \min_i \lambda_i$, entonces el único equilibrio $E_j := (\lambda_j, 0, .., 0, s_{in} - \lambda_j, 0, .., 0)$ es estable.

Este resultado fue validado experimentalmente por Hansen & Hubbel '80.

Principio de Exclusión Competitiva

- Un resultado central en la teoría del quimiostato es el Principio de Exclusión Competitiva. (Hardin '60)
- Este establece que, cuando las funciones de crecimiento μ_i's de los microorganismos son crecientes, a lo más una especie sobrevive al competir por un único recurso.

Es decir:

Teorema

Sean μ_i's crecientes. Para $D > 0$ fijo, definamos las concentraciones de quiebre como:

$$\lambda_i = \lambda_i(D) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \lim_{s\to\infty} \mu_i(s) \leq D, \\ \bar{s}_i \text{ tal que } \mu_i(\bar{s}_i) = D & \text{si no.} \end{cases}$$

Supongamos que $\min_i \lambda_i < s_{in} = 1$ y que existe un único j t.q. $\lambda_j = \min_i \lambda_i$, entonces el único equilibrio $E_j := (\lambda_j, 0, .., 0, s_{in} - \lambda_j, 0, .., 0)$ es estable.

Este resultado fue validado experimentalmente por Hansen & Hubbel '80.

Principio de Exclusión Competitiva

- Un resultado central en la teoría del quimiostato es el Principio de Exclusión Competitiva. (Hardin '60)
- Este establece que, cuando las funciones de crecimiento μ_i's de los microorganismos son crecientes, a lo más una especie sobrevive al competir por un único recurso.

Es decir:

Teorema

Sean μ_i's crecientes. Para $D > 0$ fijo, definamos las concentraciones de quiebre como:

$$\lambda_i = \lambda_i(D) = \begin{cases} +\infty, & \textit{si } \lim_{s\to\infty} \mu_i(s) \leq D, \\ \bar{s}_i \textit{ tal que } \mu_i(\bar{s}_i) = D & \textit{si no.} \end{cases}$$

Supongamos que $\min_i \lambda_i < s_{in} = 1$ y que existe un único j t.q. $\lambda_j = \min_i \lambda_i$, entonces el único equilibrio $E_j := (\lambda_j, 0, .., 0, s_{in} - \lambda_j, 0, .., 0)$ es estable.

Este resultado fue validado experimentalmente por Hansen & Hubbel '80.

Principio de Exclusión Competitiva

- Un resultado central en la teoría del quimiostato es el Principio de Exclusión Competitiva. (Hardin '60)
- Este establece que, cuando las funciones de crecimiento μ_i's de los microorganismos son crecientes, a lo más una especie sobrevive al competir por un único recurso.

Es decir:

Teorema

Sean μ_i's crecientes. Para $D > 0$ fijo, definamos las concentraciones de quiebre como:

$$\lambda_i = \lambda_i(D) = \begin{cases} +\infty, & \textit{si } \lim_{s\to\infty} \mu_i(s) \leq D, \\ \bar{s}_i \textit{ tal que } \mu_i(\bar{s}_i) = D & \textit{si no.} \end{cases}$$

Supongamos que $\min_i \lambda_i < s_{in} = 1$ *y que existe un único j t.q.* $\lambda_j = \min_i \lambda_i$, *entonces el único equilibrio* $E_j := (\lambda_j, 0, .., 0, s_{in} - \lambda_j, 0, .., 0)$ *es estable.*

Este resultado fue validado experimentalmente por Hansen & Hubbel '80.

Dos Especies: Caso $\lambda_1 = \lambda_2$

- Cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ el Principio de Exclusión Competitiva no se cumple.
- En este caso, existen infinitos equilibrios dados por:

$$\text{Equilibrios } = \{(s^*, x_1^*, x_2^*) \; : \; s^* = \lambda_1 = \lambda_2, \; x_1^* + x_2^* = s_{in} - s^* = 1 - s^*\}$$

- Sin embargo no se pueden determinar el tipo de estabilidad de estos equilibrios.
- Se muestra fácilmente que la variable $z = x_1 + x_2 + s$ converge a s_{in}, cuando $t \to \infty$.
- Sin embargo, el estudio de la variable z tampoco nos permite concluir sobre el tipo de estabilidad. Necesitamos otra variable auxiliar.

Teorema

Sea $b = x_1 + x_2$ y $s^* = \lambda_1 = \lambda_2$. Para todo punto inicial en $\mathcal{D}$ se tiene que

$$(b, s) \to (b^*, s^*) := (s_{in} - s^*, s^*), \quad t \to \infty.$$

Dos Especies: Caso $\lambda_1 = \lambda_2$

- Cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ el Principio de Exclusión Competitiva no se cumple.
- En este caso, existen infinitos equilibrios dados por:

$$\text{Equilibrios } = \{(s^*, x_1^*, x_2^*) \,:\, s^* = \lambda_1 = \lambda_2,\; x_1^* + x_2^* = s_{in} - s^* = 1 - s^*\}$$

- Sin embargo no se pueden determinar el tipo de estabilidad de estos equilibrios.
- Se muestra fácilmente que la variable $z = x_1 + x_2 + s$ converge a s_{in}, cuando $t \to \infty$.
- Sin embargo, el estudio de la variable z tampoco nos permite concluir sobre el tipo de estabilidad. Necesitamos otra variable auxiliar.

Teorema

Sea $b = x_1 + x_2$ y $s^* = \lambda_1 = \lambda_2$. Para todo punto inicial en $\mathcal{D}$ se tiene que

$$(b, s) \to (b^*, s^*) := (s_{in} - s^*, s^*), \quad t \to \infty.$$

Dos Especies: Caso $\lambda_1 = \lambda_2$

- Cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ el Principio de Exclusión Competitiva no se cumple.
- En este caso, existen infinitos equilibrios dados por:

$$\text{Equilibrios} = \{(s^*, x_1^*, x_2^*) : s^* = \lambda_1 = \lambda_2,\ x_1^* + x_2^* = s_{in} - s^* = 1 - s^*\}$$

- Sin embargo no se pueden determinar el tipo de estabilidad de estos equilibrios.
- Se muestra fácilmente que la variable $z = x_1 + x_2 + s$ converge a s_{in}, cuando $t \to \infty$.
- Sin embargo, el estudio de la variable z tampoco nos permite concluir sobre el tipo de estabilidad. Necesitamos otra variable auxiliar.

Teorema

Sea $b = x_1 + x_2$ y $s^* = \lambda_1 = \lambda_2$. Para todo punto inicial en $\mathcal{D}$ se tiene que

$$(b, s) \to (b^*, s^*) := (s_{in} - s^*, s^*), \quad t \to \infty.$$

Dos Especies: Caso $\lambda_1 = \lambda_2$

- Cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ el Principio de Exclusión Competitiva no se cumple.
- En este caso, existen infinitos equilibrios dados por:

$$\text{Equilibrios } = \{(s^*, x_1^*, x_2^*) \, : \, s^* = \lambda_1 = \lambda_2, \; x_1^* + x_2^* = s_{in} - s^* = 1 - s^*\}$$

- Sin embargo no se pueden determinar el tipo de estabilidad de estos equilibrios.
- Se muestra fácilmente que la variable $z = x_1 + x_2 + s$ converge a s_{in}, cuando $t \to \infty$.
- Sin embargo, el estudio de la variable z tampoco nos permite concluir sobre el tipo de estabilidad. Necesitamos otra variable auxiliar.

Teorema

Sea $b = x_1 + x_2$ y $s^* = \lambda_1 = \lambda_2$. Para todo punto inicial en $\mathcal{D}$ se tiene que

$$(b, s) \to (b^*, s^*) := (s_{in} - s^*, s^*), \quad t \to \infty.$$

Dos Especies: Caso $\lambda_1 = \lambda_2$

- Cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ el Principio de Exclusión Competitiva no se cumple.
- En este caso, existen infinitos equilibrios dados por:

$$\text{Equilibrios } = \{(s^*, x_1^*, x_2^*) \,:\, s^* = \lambda_1 = \lambda_2,\ x_1^* + x_2^* = s_{in} - s^* = 1 - s^*\}$$

- Sin embargo no se pueden determinar el tipo de estabilidad de estos equilibrios.
- Se muestra fácilmente que la variable $z = x_1 + x_2 + s$ converge a s_{in}, cuando $t \to \infty$.
- Sin embargo, el estudio de la variable z tampoco nos permite concluir sobre el tipo de estabilidad. Necesitamos otra variable auxiliar.

Teorema

Sea $b = x_1 + x_2$ y $s^* = \lambda_1 = \lambda_2$. Para todo punto inicial en $\mathcal{D}$ se tiene que

$$(b, s) \to (b^*, s^*) := (s_{in} - s^*, s^*), \quad t \to \infty.$$

Dos Especies: Caso $\lambda_1 = \lambda_2$

- Cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ el Principio de Exclusión Competitiva no se cumple.
- En este caso, existen infinitos equilibrios dados por:

  $$\text{Equilibrios } = \{(s^*, x_1^*, x_2^*) \,:\, s^* = \lambda_1 = \lambda_2,\; x_1^* + x_2^* = s_{in} - s^* = 1 - s^*\}$$

- Sin embargo no se pueden determinar el tipo de estabilidad de estos equilibrios.
- Se muestra fácilmente que la variable $z = x_1 + x_2 + s$ converge a s_{in}, cuando $t \to \infty$.
- Sin embargo, el estudio de la variable z tampoco nos permite concluir sobre el tipo de estabilidad. Necesitamos otra variable auxiliar.

Teorema

Sea $b = x_1 + x_2$ y $s^* = \lambda_1 = \lambda_2$. Para todo punto inicial en $\mathcal{D}$ se tiene que

$$(b, s) \to (b^*, s^*) := (s_{in} - s^*, s^*), \quad t \to \infty.$$

Planificación de la Charla

Principio de Exclusión Competitiva

- Recordemos que el Principio de Exclusión Competitiva nos dice que, cuando las funciones de crecimiento μ_i's de los microorganismos son crecientes, a lo más una especie sobrevive al competir por un único recurso.
- Tal como ha sido establecido en la literatura (ver Bush & Cook'76, Caperon'69), considerar un retardo en el tiempo es natural en biología.
- Ha sido probado que la presencia de un retardo suficientemente grande genera oscilaciones de las variables en modelos con varias especies (Freedman et al.'89).
- Es natural preguntarse: Para cuáles casos la presencia de retardos no altera el principio de exclusión competitiva?
- Existen en la literatura algunas respuestas: Freedman et al.'89, Wolkowicz & Xia'97, y Wang & Wolkowicz'06.

Principio de Exclusión Competitiva

- Recordemos que el Principio de Exclusión Competitiva nos dice que, cuando las funciones de crecimiento μ_i's de los microorganismos son crecientes, a lo más una especie sobrevive al competir por un único recurso.
- Tal como ha sido establecido en la literatura (ver Bush & Cook'76, Caperon'69), considerar un retardo en el tiempo es natural en biología.
- Ha sido probado que la presencia de un retardo suficientemente grande genera oscilaciones de las variables en modelos con varias especies (Freedman et al.'89).
- Es natural preguntarse: Para cuáles casos la presencia de retardos no altera el principio de exclusión competitiva?
- Existen en la literatura algunas respuestas: Freedman et al.'89, Wolkowicz & Xia'97, y Wang & Wolkowicz'06.

Principio de Exclusión Competitiva

- Recordemos que el Principio de Exclusión Competitiva nos dice que, cuando las funciones de crecimiento μ_i's de los microorganismos son crecientes, a lo más una especie sobrevive al competir por un único recurso.
- Tal como ha sido establecido en la literatura (ver Bush & Cook'76, Caperon'69), considerar un retardo en el tiempo es natural en biología.
- Ha sido probado que la presencia de un retardo suficientemente grande genera oscilaciones de las variables en modelos con varias especies (Freedman et al.'89).
- Es natural preguntarse: Para cuáles casos la presencia de retardos no altera el principio de exclusión competitiva?
- Existen en la literatura algunas respuestas: Freedman et al.'89, Wolkowicz & Xia'97, y Wang & Wolkowicz'06.

Principio de Exclusión Competitiva

- Recordemos que el Principio de Exclusión Competitiva nos dice que, cuando las funciones de crecimiento μ_i's de los microorganismos son crecientes, a lo más una especie sobrevive al competir por un único recurso.
- Tal como ha sido establecido en la literatura (ver Bush & Cook'76, Caperon'69), considerar un retardo en el tiempo es natural en biología.
- Ha sido probado que la presencia de un retardo suficientemente grande genera oscilaciones de las variables en modelos con varias especies (Freedman et al.'89).
- Es natural preguntarse: Para cuáles casos la presencia de retardos no altera el principio de exclusión competitiva?
- Existen en la literatura algunas respuestas: Freedman et al.'89, Wolkowicz & Xia'97, y Wang & Wolkowicz'06.

Principio de Exclusión Competitiva

- Recordemos que el Principio de Exclusión Competitiva nos dice que, cuando las funciones de crecimiento μ_i's de los microorganismos son crecientes, a lo más una especie sobrevive al competir por un único recurso.
- Tal como ha sido establecido en la literatura (ver Bush & Cook'76, Caperon'69), considerar un retardo en el tiempo es natural en biología.
- Ha sido probado que la presencia de un retardo suficientemente grande genera oscilaciones de las variables en modelos con varias especies (Freedman et al.'89).
- Es natural preguntarse: Para cuáles casos la presencia de retardos no altera el principio de exclusión competitiva?
- Existen en la literatura algunas respuestas: Freedman et al.'89, Wolkowicz & Xia'97, y Wang & Wolkowicz'06.

Principio de Exclusión Competitiva

- En esta sección, damos una nueva respuesta a esta interrogante para un conocido modelo de quimiostato con n especies (Freedman et al.'89).
- Consideramos funciones de crecimiento del tipo Monod:

$$\mu_i(s) = \frac{m_i s}{a_i + s}.$$

- Sólo consideramos retardos τ_i's provenientes de la transformación de nutriente s en concentraciones x_i's de las especies i's (ver justificación en Bush & Cook'76).
- Supondremos que

$$\mu(s_{in}) = \frac{m_i s_{in}}{a_i + s_{in}} > D, \text{ para todo } i,$$

lo que implica la existencia de n constantes positivas λ_i tales que

$$\mu_i(\lambda_i) = D.$$

- Finalmente supondremos también que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 1$.

Principio de Exclusión Competitiva

- En esta sección, damos una nueva respuesta a esta interrogante para un conocido modelo de quimiostato con n especies (Freedman et al.'89).
- Consideramos funciones de crecimiento del tipo Monod:

$$\mu_i(s) = \frac{m_i s}{a_i + s}.$$

- Sólo consideramos retardos τ_i's provenientes de la transformación de nutriente s en concentraciones x_i's de las especies i's (ver justificación en Bush & Cook'76).
- Supondremos que

$$\mu(s_{in}) = \frac{m_i s_{in}}{a_i + s_{in}} > D, \quad \text{para todo } i,$$

lo que implica la existencia de n constantes positivas λ_i tales que

$$\mu_i(\lambda_i) = D.$$

- Finalmente supondremos también que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 1$.

Principio de Exclusión Competitiva

- En esta sección, damos una nueva respuesta a esta interrogante para un conocido modelo de quimiostato con n especies (Freedman et al.'89).
- Consideramos funciones de crecimiento del tipo Monod:

$$\mu_i(s) = \frac{m_i s}{a_i + s}.$$

- Sólo consideramos retardos τ_i's provenientes de la transformación de nutriente s en concentraciones x_i's de las especies i's (ver justificación en Bush & Cook'76).
- Supondremos que

$$\mu(s_{in}) = \frac{m_i s_{in}}{a_i + s_{in}} > D, \quad \text{para todo } i,$$

lo que implica la existencia de n constantes positivas λ_i tales que

$$\mu_i(\lambda_i) = D.$$

- Finalmente supondremos también que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 1$.

Principio de Exclusión Competitiva

- En esta sección, damos una nueva respuesta a esta interrogante para un conocido modelo de quimiostato con n especies (Freedman et al.'89).
- Consideramos funciones de crecimiento del tipo Monod:

$$\mu_i(s) = \frac{m_i s}{a_i + s}.$$

- Sólo consideramos retardos τ_i's provenientes de la transformación de nutriente s en concentraciones x_i's de las especies i's (ver justificación en Bush & Cook'76).
- Supondremos que

$$\mu(s_{in}) = \frac{m_i s_{in}}{a_i + s_{in}} > D, \ \text{para todo } i,$$

lo que implica la existencia de n constantes positivas λ_i tales que

$$\mu_i(\lambda_i) = D.$$

- Finalmente supondremos también que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 1$.

Principio de Exclusión Competitiva

- En esta sección, damos una nueva respuesta a esta interrogante para un conocido modelo de quimiostato con n especies (Freedman et al.'89).
- Consideramos funciones de crecimiento del tipo Monod:

$$\mu_i(s) = \frac{m_i s}{a_i + s}.$$

- Sólo consideramos retardos τ_i's provenientes de la transformación de nutriente s en concentraciones x_i's de las especies i's (ver justificación en Bush & Cook'76).
- Supondremos que

$$\mu(s_{in}) = \frac{m_i s_{in}}{a_i + s_{in}} > D, \text{ para todo } i,$$

lo que implica la existencia de n constantes positivas λ_i tales que

$$\mu_i(\lambda_i) = D.$$

- Finalmente supondremos también que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 1$.

Modelo del Quimiostato con Retardo

Así, el modelo estudiado viene dado por:

$$\begin{cases} \dot{s} &= D(s_{in} - s) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(s)}{Y_i} x_i, \\ \dot{x}_1 &= [\mu_1(s(t-\tau_1)) - D]x_1, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= [\mu_n(s(t-\tau_n)) - D]x_n, \end{cases}$$

donde hemos considerado una función continua $\phi : [-\tau_M, 0] \to \mathbb{R}_+$ para dar sentido a las condiciones iniciales del anterior modelo.

Obtenemos así una única solución $(s(t), x_1(t), ..., x_n(t))$, definida sobre $[0, +\infty)$, y tal que $s(t) = \phi(t)$ para todo $t \in [-\tau_M, 0]$, y $x_i(0) = x_{i0}$ para todo $i = 1, ..., n$.

Función de Lyapunov Estricta en Ausencia de Retardo

Teorema

El punto $(s_*, x_{1*}, 0, \ldots, 0)$, con $s_* = \lambda_1$, $x_{1*} = s_{in} - s_*$, es un equilibrio GAE y LEE del modelo de quimiostato (sin retardo) en el dominio $\mathcal{D}$. Más aún, para $\tilde{s} = s - s_*$, $\tilde{x}_1 = x_1 - x_{1*}$, $\xi = (x_2, ..., x_n)$ y

$$V(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \xi) := \tilde{s} - s_* \ln\left(1 + \frac{\tilde{s}}{s_*}\right) + \frac{a_1 + s_*}{a_1}\left[\tilde{x}_1 - x_{1*}\ln\left(1 + \frac{\tilde{x}_1}{x_{1*}}\right)\right] + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i + s_*}{a_i} x_i,$$

la derivada de la función

$$U(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \xi) := V(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \xi) + \frac{1}{2}\left(\tilde{s} + \tilde{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2,$$

a lo largo de las trayectorias del sistema, es $\dot{U} = -W(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \xi)$ donde

$W(\tilde{s}, \tilde{x}_1, \xi)$ es una función estrictamente positiva.

Ppio. Exclusión Competitiva en Presencia de Retardo

El siguiente resultado se basa en la construcción de un funcional de Lyapunov-Krasovskii para el modelo de quimiostato con retardo.

Teorema

Supongamos que $\tau_i \leq \min_{j=0,..,4} \{A_j\}$ *para todo* $i = 1, ..., 4$*, donde*

$$A_0 = \frac{1}{D} \ln\left(\frac{6}{5}\right), \quad A_1 = \frac{1}{M-D} \ln\left(\frac{4M}{4M-D}\right), \quad A_2 = \frac{a_1^2 c}{8s_{in}(a_1 + s_{in})m_1 M},$$

$$A_3 = \frac{c}{8M \max\limits_{i=2,\dots,n} \left\{ \left(\frac{s_{in}}{a_i} + 3\right) \frac{s_{in} m_i}{a_i} \right\}},$$

$$A_4 = \frac{a_1^2 D}{2\sqrt{2} m_1 s_{in}(3a_1 + s_{in}) \max\left\{1, \frac{s_{in}}{a_1}, \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{c}}\right\}},$$

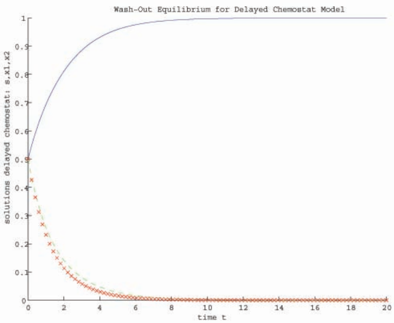
Entonces el punto $(s_*, x_{1*}, 0, \dots, 0)$ *es un equilibrio GAE y LEE del modelo de quimiostato con retardo en el dominio* $\mathcal{D}$.

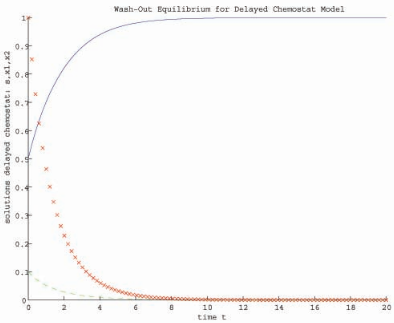
Planificación de la Charla

Simulaciones Numéricas

Ejemplo (nutriente (s) = –, especie 1 (x_1) = - -, y especie 2 (x_2)= xx)

Tomamos $D = 1,\ m_1 = 2,\ a_1 = 3,\ m_2 = 3,\ a_2 = 7,\ \tau_1 = 0.001, \tau_2 = 0.002,$ *obtenemos* $\max_i \tau_i = 0.002 \leq \min_i A_i = 0.0031$. *Pero* $\lambda_1 = 3$ *y* $\lambda_2 = 3.5$ *no satisfacen nuestras hipótesis (pues* $\mu_1(s_{in}) = 0.5$ *y* $\mu_2(s_{in}) = 0.375$*), lo que lleva un equilibrio wash-out* $(s_*, x_{1*}, x_{2*}) = (1, 0, 0)$.



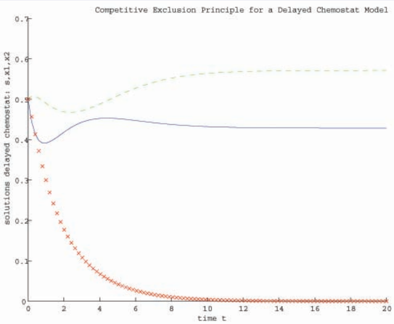


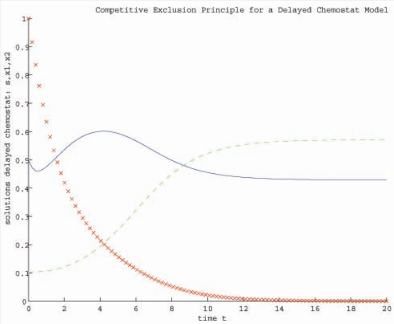
$s(t) = x_1(t) = x_2(t) = 0.5;\ \ s(t) = 0.2, x_1(t) = 1, x_2(t) = 0.1, \forall t \in [-\tau_M, 0].$

Simulaciones Numéricas

Ejemplo (nutriente (s) = –, especie 1 (x_1) = - -, y especie 2 (x_2)= xx)

Con $D = 1, m_1 = 3.8, a_1 = 1.2, m_2 = 7, a_2 = 5.5, \tau_1 = 0.001, \tau_2 = 0.0002,$ *obtenemos* $\max_i \tau_i = 0.001 \le \min_i A_i = 0.0015$. *Luego como* $\lambda_1 = 0.4286$ *y* $\lambda_2 = 0.9167$ *cumplen nuestras hipótesis, el ppio. exclusión competitiva nos dice que el equilibrio* $(s_*, x_{1*}, x_{2*}) = (0.4286, 0.5714, 0)$ *es GAE.*





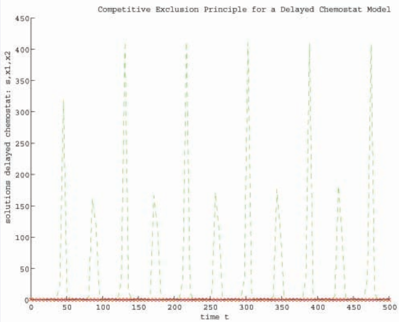
$s(t) = x_1(t) = x_2(t) = 0.5;\ s(t) = 0.2,\ x_1(t) = 1,\ x_2(t) = 0.1, \forall t \in [-\tau_M, 0].$

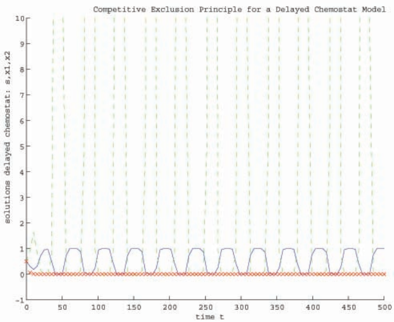
Simulaciones Numéricas

Ejemplo (nutriente (s) = –, especie 1 (x_1) = - -, y especie 2 (x_2)= xx)

Con lo mismos parámetros del ejemplo anterior excepto por $\tau_1 = 10$ *y* $\tau_2 = 20$*, se obtiene que* $\max_i \tau_i = 20 > \min_i A_i = 0.0015$.

Luego no se converge al equilibrio (s_*, x_{1*}, x_{2*}) *anterior. De hecho, en este caso las concentraciones* x_1 *y* s *oscilan, mientras que* x_2 *desaparece.*





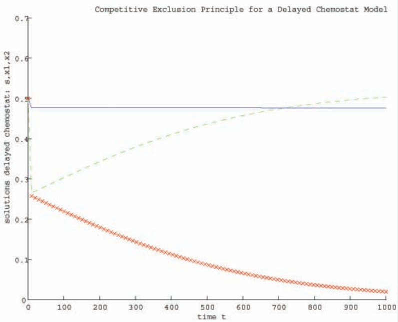
$s(t) = x_1(t) = x_2(t) = 0.5, \forall t \in [-\tau_M, 0]$.

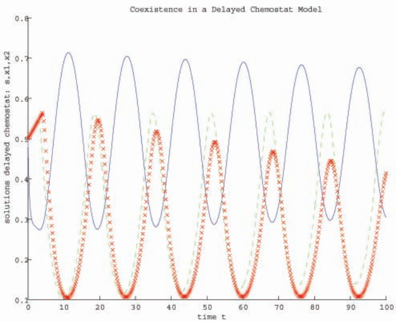
Normal: axis $Y \in [0, 450]$*; Zoom: axis* $Y \in [-1, 10]$

Simulaciones Numéricas

Ejemplo (nutriente (s) = –, especie 1 (x_1) = - -, y especie 2 (x_2)= xx)

Con $D = 1, m_1 = 3.1, a_1 = 1, m_2 = 3.09, a_2 = 1$ *(Freedman et al.'89), obtenemos* $\lambda_1 = 0.4762$ *y* $\lambda_2 = 0.4785$ *que satisfacen nuestras hipótesis, y* $\min_i A_i = 1.0558 \cdot 10^{-5}$. *Veamos cuando el ppio. exclusión competitiva se tiene, i.e. el equilibrio* $(s_*, x_{1*}, x_{2*}) = (0.4762, 0.5238, 0)$ *es GAE.*





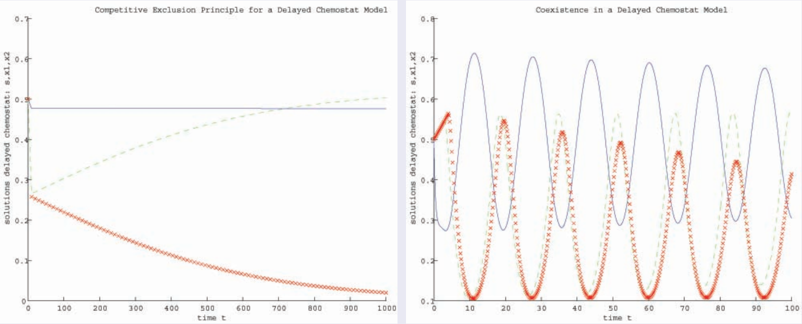
$s(t) = x_1(t) = x_2(t) = 0.5, \forall t \in [-\tau_M, 0]$.

SI: $\tau_1 = 0.1$ *y* $\tau_2 = 0.2$; *NO:* $\tau_1 = 3$ *y* $\tau_2 = 4$ *(cf. Freedman et al.'89).*

Simulaciones Numéricas

Ejemplo (nutriente (s) = –, especie 1 (x_1) = - -, y especie 2 (x_2)= xx)

Con $D = 1, m_1 = 3.1, a_1 = 1, m_2 = 3.09, \; a_2 = 1$ *(Freedman et al.'89), obtenemos* $\lambda_1 = 0.4762$ *y* $\lambda_2 = 0.4785$ *que satisfacen nuestras hipótesis, y* $\min_i A_i = 1.0558 \cdot 10^{-5}$*. Veamos cuando el ppio. exclusión competitiva se tiene, i.e. el equilibrio* $(s_*, x_{1*}, x_{2*}) = (0.4762, 0.5238, 0)$ *es GAE.*



$$s(t) = x_1(t) = x_2(t) = 0.5, \forall t \in [-\tau_M, 0].$$

SI: $\tau_1 = 0.1$ *y* $\tau_2 = 0.2$*;* *NO:* $\tau_1 = 3$ *y* $\tau_2 = 4$ *(cf. Freedman et al.'89).*

Resumen

- El Principio de Exclusión Competituva (PEC) nos dice que, cuando las funciones de crecimiento μ_i's son crecientes y $\lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n < s_{in}$, a lo más una especie sobrevive al competir por un único recurso.
- Para un quimiostato con 2 especies, el PEC puede dejar de cumplirse si $\lambda_1 = \lambda_2$.
- Sin embargo, aun puede decirse algo de la concentración total $x_1 + x_2$ de los microorganismos.
- Para las n especies, cuando las μ_i's son funciones de tipo Monod, se ha probado que el PEC es también válido cuando se considera un retardo pequeño.
- La cota superior para este retardo fue calculada explícitamente.
- Sin embargo, resulta claro de las simulaciones numéricas que esta cota puede mejorarse.
- Para establecer este resultado construimos un funcional de Lyapunov-Krasovskii.
- Esto tiene ventajas potenciales muy interesantes como por ejemplo robustez.

Bibliografía

A. W. Bush and A. E. Cook.
The efect of time delay and growth rate inhibition in the bacterial treatment of wastewater.
J. Theoret. Biol. 63, 385–395, 1975.

H.I. Freedman, J. So, P. Waltman.
Coexistence in a model of competition in the chemostat incorporating discrete delays.
SIAM J. Appl. Math., Vol. 49, No.3, pp. 859-870, June 1989.

P. Gajardo, F. Mazenc, H. Ramírez C.
Competitive exclusion principle in a model of chemostat with delays.
Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 16, pp. 253-272, 2009.

M. Malisoff and F. Mazenc.
Construction of Strict Lyapunov Functions.
Series: Communications and Control Engineering, Springer, 2009.