

MA45C **Ecología Matemática**. Semestre Otoño 2010

Profesores: Salomé Martínez, Héctor Ramírez C.

Programa Curso Electivo: Ecología Matemática (10 U.D.)

1. Objetivos y líneas generales del curso

La matemática ha jugado históricamente un rol importante en ciencias como la física y química, sin embargo, la aplicación de los métodos matemáticos a la ecología es relativamente reciente. Hoy, diversos temas en esta área como el comportamiento de las epidemias, la gestión de recursos naturales, el estudio de microorganismos, entre otros, están siendo analizados usando técnicas matemáticas y herramientas computacionales. Surgiendo así un nuevo y fructífero terreno para la investigación multidisciplinaria.

Esto ha tenido un, aún más reciente, impacto en la formación de alumnos de pre- y post-grado de distintas universidades en el mundo. Nuestra principal motivación a la hora de dictar este curso es recrear estas experiencias en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

Así, este curso está orientado a alumnos de ingeniería o licenciatura en ciencias, a un nivel de pre- o post-grado, con interés en los modelos ecológicos. Los requisitos específicos se detallan en la próxima subsección.

Nuestro objetivo principal es introducir a los alumnos en el análisis y resolución de problemas provenientes de la ecología, mediante herramientas matemáticas y computacionales simples. Para esto se ha previsto un curso de 10 U.D. por semana, distribuidas formalmente en 3 horas de clases de cátedra, 2 horas de clases auxiliares (destinadas a exposiciones y evaluaciones) y 5 horas de trabajo personal. Obteniendo así un curso de aproximadamente 30 sesiones en el semestre, donde además de las clases de cátedra (a cargo de alguno de los profesores), los alumnos expondrán tópicos relacionados con la temática del curso. La estructura del curso y varios de sus temas seguirán el libro [2]. Material complementario es entregado en la bibliografía del curso que se encuentra al final de este documento.

1.1. Requisitos

Se ha fijado como requisito para seguir este curso el haber aprobado el curso *MA2002: Cálculo Avanzado y Aplicaciones* del plan común de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, o su equivalente en otra facultad o universidad. Este ramo suele dictarse en otras universidades bajo el nombre de *Calculo IV*. Los contenidos del curso MA26B están disponibles en http://www.dim.uchile.cl/~docencia/calculo_avanzado

Es también **recomendable** tener ciertos conocimientos mínimos de probabilidades. Por ejemplo, haber rendido el curso *MA3403: Probabilidades y Estadística* del plan común de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, o su equivalente en otra facultad o universidad. Los contenidos del curso MA3403 están disponibles en http://www.dim.uchile.cl/~docencia/proba_esta

1.2. Conocimientos que se esperan adquirir

Se mostrará al alumnado un conjunto de modelos matemáticos que se estudian en ecología, así como técnicas y herramientas de análisis para resolverlos.

Durante este curso se espera además que el alumnado adquiera diversos conocimientos y habilidades, tanto matemáticos como computacionales, que luego pueda aplicar al estudio de los procesos biológicos/ecológicos estudiados en el curso.

Algunas herramientas matemáticas que se tratarán en este curso, en el contexto antes mencionado, son por ejemplo: análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias (diagramas de fase, estabilidad, teorema de Poincaré-Bendixon, etc.), ciertos tópicos en ecuaciones en derivadas parciales, aspectos introductorios de la teoría de control óptimo (principio de Pontryagin), entre otros.

También se espera que el alumnado desarrolle habilidades computacionales básicas en cálculo simbólico y numérico, usando softwares como Maple[®] y MATLAB[®]. Los alumnos con poco o ningún conocimiento en este tipo de programación aprenderán así una nueva habilidad, y quienes ya tengan cierta experiencia computacional podrán enfocarse a las aplicaciones biológicas que se estudian.

1.3. Evaluaciones

Este curso tendrá 2 tipos de evaluaciones:

1. **Exposiciones:** cada alumno deberá exponer 1 o 2 temas extraídos de los libros o artículos señalados en la bibliografía u oportunamente en cátedra. La lista detallada de posibles temas serán difundidos adecuadamente durante el transcurso de las primeras semanas del curso.
2. **Tareas:** en clases se entregarán problemas y aplicaciones de los temas enseñados, que el alumnado deberá resolver en un plazo debidamente indicado. También se espera que los alumnos programen (principalmente en MATLAB[®] y Maple[®]) algunos aspectos de los modelos enseñados en clases, realizando simulaciones y comparando los resultados con la teoría enseñada en cátedra. Estas tareas serán individuales.

La participación del alumnado en las clases y exposiciones también será considerada al momento de la evaluación.

2. Programa

I Modelos con una sola especie

- Modelo logístico
- Modelos con función de captura/cosecha
- Modelos estocásticos para nacimiento y muerte de poblaciones
- Modelos a tiempo discreto

II Modelos multi-especies

- Análisis cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Modelos depredador presa tipo Lotka-Volterra
- Modelos de cooperación y competencia

III El modelo del Quimiostato

- Introducción y aplicaciones
- Principio de competición exclusiva
- Modelos de Quimiostato con retardo en el tiempo

IV Aplicaciones de la teoría de control óptimo a la biología

- Modelos logísticos con captura: aplicaciones a modelos de pesca
- Aplicaciones al modelo de Quimiostato

V Modelos con estructura espacial

- Ecuaciones y sistemas de reacción-difusión
- Inestabilidad inducida por la difusión
- Invasiones y ondas viajeras
- Modelos no locales

VI Modelos con otras estructuras

- Modelos con estructuras etarias: aplicaciones a los modelos de pesca
- Modelos con estructuras de talla o tamaño
- Modelos poblacionales con estructuras de sexo

Referencias

- [1] C. W. CLARK. Mathematical bioeconomics of optimal management of renewable resources. *Pure and Applied Mathematics (New York)*. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1990.
- [2] M. KOT. Elements of mathematical ecology. *Cambridge University Press*, Cambridge, 2001.
- [3] B. PERTHAME. Transport equations in biology. *Birkhäuser*, 2007.
- [4] N. SHIGESADA, K. KAWASAKI. Biological Invasions: Theory and Practice. *Oxford University Press*, 1997.
- [5] H.L. SMITH AND P. WALTMAN. The theory of the Chemostat. *Cambridge University Press*, 1995.

Lecturas complementarias

- [6] A. W. BUSH AND A. E. COOK. *The efect of time delay and growth rate inhibition in the bacterial treatment of wastewater*, J. Theoret. Biol. 63, 385–395, 1975.
- [7] M. DE LARA, L. DOYEN, T. GUILBAUD, AND M.J. ROCHET. *Monotonicity properties for the viable control of discrete time systems*. Systems and Control Letters, 2006. (in press).
- [8] L. EDELSTEIN-KESHET. Mathematical models in biology. *Classics in Applied Mathematics, 46*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) (Reprint of the 1988 original). Philadelphia, PA, 2005.
- [9] H.I. FREEDMAN, J. SO, P. WALTMAN. *Coexistence in a model of competition in the chemostat incorporating discrete delays*. SIAM J. Appl. Math., Vol. 49, No.3, pp. 859-870, June 1989.
- [10] P. GAJARDO, F. MAZENC AND H. RAMÍREZ C. *Competitive Exclusion Principle in a Model of Chemostat with Delays*. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 16, pp. 253-272, 2009.
- [11] P. GAJARDO, H. RAMÍREZ C. AND A. RAPAPORT. *Minimal Time Sequential Batch Reactors with Bounded and Impulse Controls for One or More Species*. SIAM J. Control and Optimization, vol. 47, Issue 6, pp. 2827-2856, 2008.
- [12] J. MORENO. *Optimal control of bioreactors for the wastewater treatment*. Optimal Control, Applications and Methods, 20, pp. 145–164, 1999.
- [13] J.D. MURRAY. Mathematical biology I. An introduction. Third edition. *Interdisciplinary Applied Mathematics, 17*. Springer-Verlag, New York, 2002.