Modelos a tiempo discreto

Modelo Ricker

Héctor Ramirez Cabrera
Claudio Pareja Pineda

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

CURSO MA45C: ECOLOGÍA MATEMÁTICA
SEMESTRE OTOÑO 2010

Modelo de Ricker
Equilibrios

Modelo de Ricker:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n), & x_0 > 0 \\ f(x) &= xe^{r(1-x/k)}, & r, K > 0 \end{aligned}$$

donde e^r es un factor de reproducción y $e^{-rx/k}$ es un factor de mortalidad dependiente de la densidad.

Buscamos los equilibrios:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(\bar{x}) \\ \Rightarrow \bar{x} &= \bar{x}e^{r(1-\bar{x}/K)} \\ \Rightarrow 1 &= e^{r(1-\bar{x}/K)} \qquad (\bar{x} \neq 0) \\ \Rightarrow 0 &= r\left(1 - \frac{\bar{x}}{K}\right) \qquad \Rightarrow \bar{x} = K \end{aligned}$$

Luego los equilibrios son $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} = K$.

Modelo Ricker
Estabilidad

Para estabilidad buscamos

$$|f'(\bar{x})| < 1$$

En nuestro caso:

$$f'(x) = e^{r(1-x/K)} - x\frac{r}{K}e^{r(1-x/K)}$$

$$\begin{array}{lclcl|lcl} & & & & & \multicolumn{3}{c}{\text{Estable si}} \\ \bar{x} = 0 & \Rightarrow & |f'(0)| & = & e^r & r & < & 0 \\ \bar{x} = K & \Rightarrow & |f'(K)| & = & |1-r| & r & \in & (0,2) \end{array}$$

Reescritura y nuevos equilibrios

Consideramos entonces a:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ f(x) &= axe^{-x} \qquad a > 0 \end{aligned}$$

Cuyos equilibrios son:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a\bar{x}e^{-\bar{x}} \\ \Rightarrow 1 &= ae^{-\bar{x}} \qquad (\bar{x} \neq 0) \\ \Rightarrow e^{\bar{x}} &= a \\ \Rightarrow \bar{x} &= \ln(a) \end{aligned}$$

Ergo los equilibrios son $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} = \ln(a)$.

Estabilidad

Buscabamos

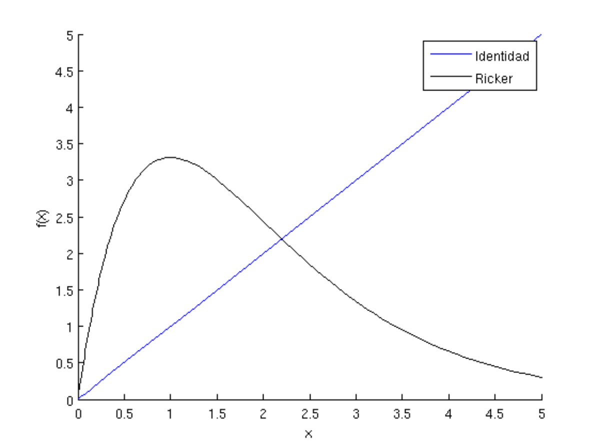
$$|f'(\bar{x})| < 1$$

Ahora se tiene:

$$f'(x) = ae^{-x} - axe^{-x} = ae^{-x}(1 - x)$$

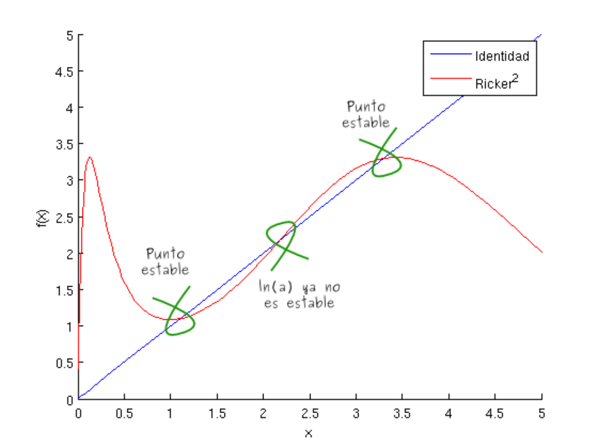
$$\begin{array}{llrcll} & & & & & \text{Estable si} \\ \bar{x} = 0 & \Rightarrow & |f'(0)| & = & |a| & a \; < \; 1 \\ \bar{x} = \ln(a) & \Rightarrow & |f'(\ln a)| & = & |1 - \ln(a)| & a \; \in \; (1, e^2 \approx 7.38) \end{array}$$

Equilibrios para $a = 9$



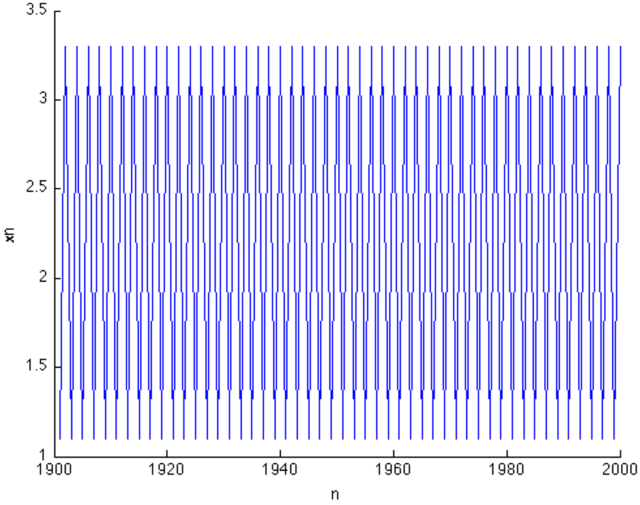
Intersecciones (equilibrios) de la recta identidad con la función de crecimiento

2-Ciclos



Aparición de un 2-ciclo con $a = 9$.

Convergencia de x_n a un 2-ciclo ($a = 9$)



Aparición de bifurcaciones dobles da lugar a un 2-ciclo

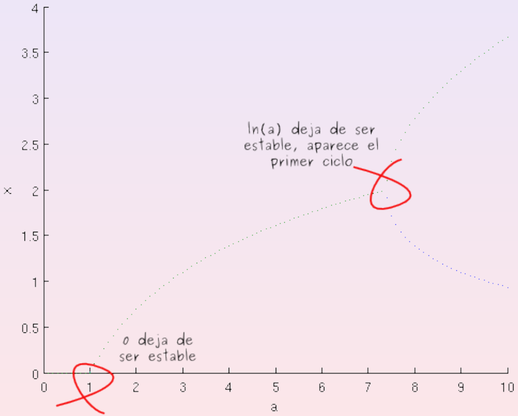
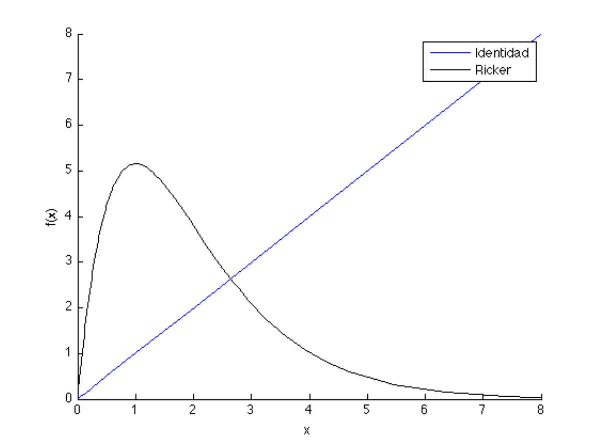


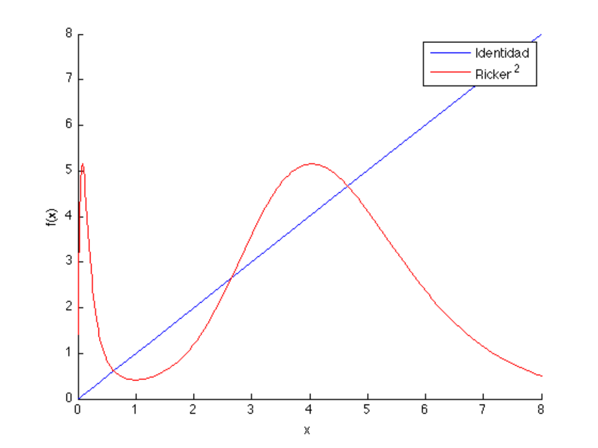
Diagrama de Feigenbaum para el modelo Ricker con un sólo parámetro $a \in [0, 10]$. Se uso $x(0) = 0.5$.

Equilibrios para $a = 14$



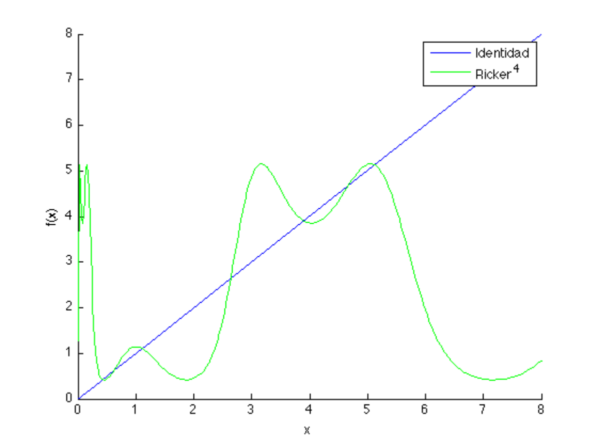
Intersecciones (equilibrios) de la recta identidad con la función de crecimiento

4-Ciclos



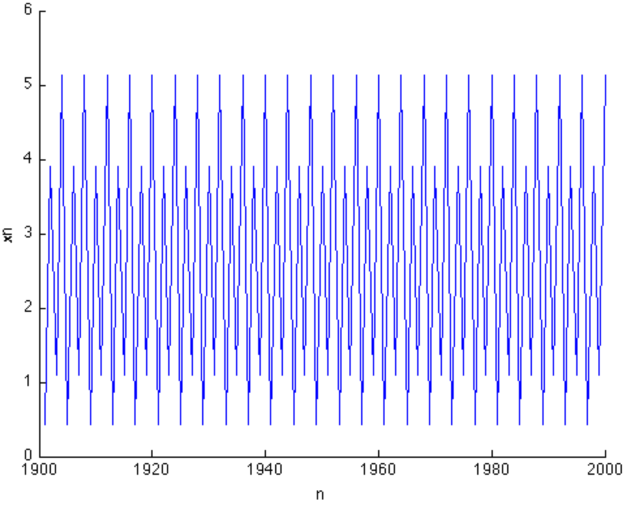
Aparición de un 4-ciclo con $a = 14$.

4-Ciclos



Aparición de un 4-ciclo con $a = 14$.

Convergencia de x_n a un 4-ciclo ($a = 14$)



Aparición de bifurcaciones dobles da lugar a un 4-ciclo

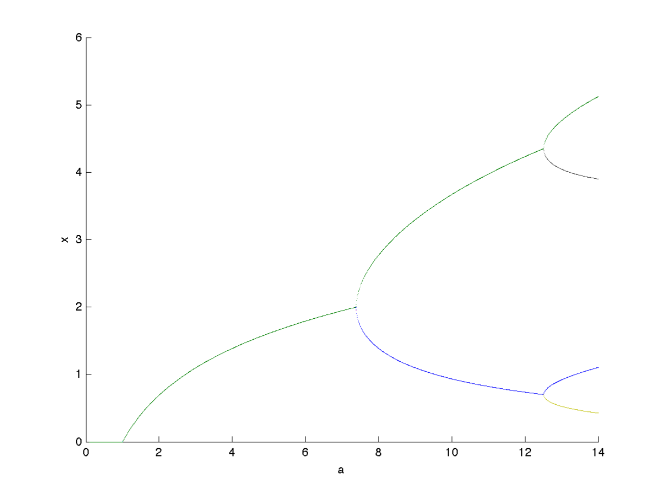


Diagrama de Feigenbaum para $a \in [0, 14]$

Aparición del caos

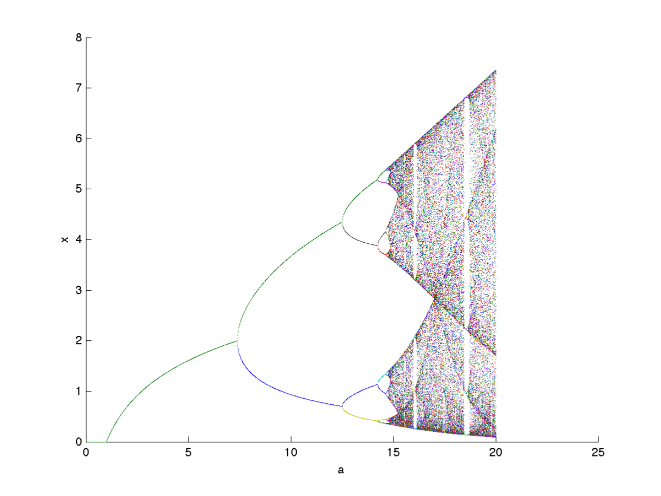
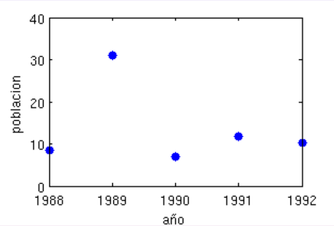


Diagrama de Feigenbaum para $a \in [0, 20]$.

Obtención de un modelo lineal

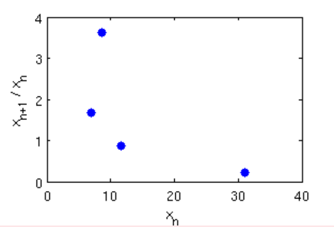
Considere la sgte. tasa de nidos por Ha para la Avispa (*Vespula Vulgaris*) obtenida de una zona controlada de Nueva Zelandia:

1988	1989	1990	1991	1992
8.6	31.1	7	11.7	10.2



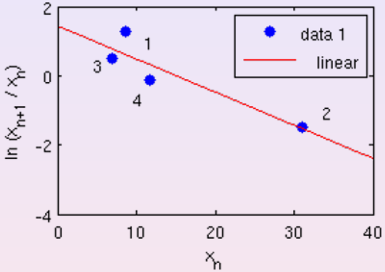
Ahora reescribimos el modelo:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n \exp r\left(1-\frac{x_n}{K}\right)\\
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \exp r\left(1-\frac{x_n}{K}\right)
\end{aligned}
$$



Obtención y ajuste

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n \exp r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \\
\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) &= r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \\
\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) &= \underbrace{r}_{a} \underbrace{-\frac{r}{K}}_{b} x_n
\end{aligned}
$$



$\ln\left(x_{n+1}/x_n\right)$ vs x_n. El número sobre los puntos indica n.

Interpolamos usando el comando `polyfit`:

$$
\begin{aligned}
a &= 1.4396 \quad \Rightarrow \quad r = 1.4396 \\
b &= -0.0957 \quad \Rightarrow \quad K = 1.4396/0.0957 = 15.0428
\end{aligned}
$$