Control 1: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Profesores Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

26 de Mayo del 2010

P1. Sea $N \geq 1$ y $\alpha \in (0,1)$. Sea $(X_n : n \in \mathbb{N})$ una cadena de Markov con conjunto de estados $I_N = \{0, ..., N\}$ finito y con matriz de transión P dada por

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, ..., N-1\} : \; p_{i,i+1} &= \frac{N-i}{N}\,, \;\; p_{i,i} = \frac{i}{N}, \\ p_{N,0} &= \alpha\,, \;\; p_{N,N} = 1-\alpha\,, \end{aligned}$$

y $p_{i,j} = 0$ en cualquier otro caso.

Suponga que $X_0 = 0$. Para $i \geq 1$ defina

$$T_0 = 0, \;\; T_i = \text{ínf}\{n \geq 1 : X_n = i\}\,.$$

(a) Pruebe que para $i < N$ se tiene $T_{i+1} - T_i \sim$ Geométrica$\left(\frac{N-i}{N}\right)$.

(b) Use el Teorem de Kac para calcular

$$\forall j \in \{1, ..., N\} : \;\; \frac{\pi_j}{\pi_0}.$$

donde π es la distribución estacionaria de la cadena de Markov (porqué existe y es única?).

P2. Para la cadena de ramificación consideramos el caso en que la ley $p = (p_i : i \geq 0)$ de la cantidad de descendientes de un individuo es tal que $p_0 + p_2 = 1$. Calcule la probabilidad de extinción en función de p_0, p_2, en particular concluya que la cadena se extingue $\mathbb{P}-$c.s. si y solo si $p_0 \geq 1$.

P3. Sea $Y = (Y_i : i \geq 0)$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_i = -1) = q$, donde $p + q = 1$, $p \in (0,1)$. Considere $S = (S_n : n \geq 0)$ el paseo aleatorio generado:

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

S es cadena de Markov con

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = -1).$$

Supondremos que

$$S_0 = 0. \tag{1}$$

(a) Pruebe que si $l_0, l_1, ..., l_n$ son elementos de $\mathbb{Z}$ que verifican $l_0 = 0$ y $|l_{k+1} - l_k| = 1$ para todo $k = 0, .., n-1$, entonces

$$\mathbb{P}(S_k = l_k, k = 0, ..., n) = p^{\frac{1}{2}(n+l_n)} q^{\frac{1}{2}(n-l_n)}$$

Considere $X = (X_n := |S_n| : n \geq 0)$. Observe que $X_0 = 0$, X_n toma valores en $\mathbb{N} = \{0, 1, ..\}$ y para todo $n \geq 0$ se tiene $\mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| = 1) = 1$. Uno de los objetivo del problema es probar que X es cadena de Markov.

Fijemos $i_0, i_1, ..., i_n$ en $\mathbb{N}$ tales que $i_0 = 0$ e $|i_{k+1} - i_k| = 1$ para todo $k = 0, .., n-1$.

(b) Pruebe que si $i_n = 0$ se tiene

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_n + 1 \,|\, X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = 1.$$

(c) Pruebe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = i_n + 1 \,|\, X_0 = i_0, ..., X_n = i_n, S_n = i_n) &= p, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = i_n + 1 \,|\, X_0 = i_0, ..., X_n = i_n, S_n = -i_n) &= q. \end{aligned}$$

(d) Denote por $a = \text{máx}\{k \in \{0, .., n-1\} : i_k = 0\}$, (Por (1) se tiene que $a \in \{0, ..., n-1\}$, es decir el conjunto donde se toma el máximo no es vacío). Luego $i_a = 0$ y se tiene $\{X_a = i_a\} = \{S_a = i_a\}$.

Pruebe que

$$\mathbb{P}(S_n = i_n, X_n = i_n, ..., X_{a+1} = i_{a+1} \,|\, X_a = i_a, ..., X_0 = i_0) = \eta_1 \text{ con } \eta_1 = p^{\frac{1}{2}(n-a+i_n)} q^{\frac{1}{2}(n-a-i_n)},$$
$$\mathbb{P}(S_n = -i_n, X_n = i_n, ..., X_{a+1} = i_{a+1} \,|\, X_a = i_a, ..., X_0 = i_0) = \eta_2 \text{ con } \eta_2 = p^{\frac{1}{2}(n-a-i_n)} q^{\frac{1}{2}(n-a+i_n)}.$$

(e) Deduzca $\mathbb{P}(X_n = i_n, ..., X_{a+1} = i_{a+1} \,|\, X_a = i_a, ..., X_0 = i_0) = \eta_1 + \eta_2$ y pruebe

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = i_n \,|\, X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) &= \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{p^{i_n}}{p^{i_n} + q^{i_n}}, \\ \mathbb{P}(S_n = -i_n \,|\, X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) &= \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{q^{i_n}}{p^{i_n} + q^{i_n}}. \end{aligned}$$

(f) Finalmente pruebe

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = i_n + 1 \,|\, X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) = \frac{p^{i_n+1} + q^{i_n+1}}{p^{i_n} + q^{i_n}} \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = i_n - 1 \,|\, X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) \end{aligned}$$

Hint: Observe que en general se tiene:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(U = u \,|\, Z_n = j_n ...., Z_{a+1} = j_{a+1}, Z_a = j_a, ..., Z_0 = j_0) \\ &\quad = \frac{\mathbb{P}(U = u, Z_n = j_n, ..., Z_{a+1} = j_{a+1} \,|\, Z_a = j_a, ..., Z_0 = j_0)}{\mathbb{P}(Z_n = j_n, ..., Z_{a+1} = j_{a+1} \,|\, Z_a = j_a, ..., Z_0 = j_0)} \end{aligned}$$

Usted acaba de probar que el proceso X es de Markov.

Tiempo: 4 horas.

Puntaje: Problema 1 (2 puntos), Problema 2 (1 puntos),Problema 3 (3 puntos). Al interior de cada problema las partes tienen igual ponderación.