

Examen: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez

Auxiliares: Andres Fielbaum - Gonzalo Mena

Entrega hasta 26 julio 2010

P1. The PASTA property (Poisson Arrivals See Time Averages)

Sea $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ cadena de Markov a tiempo continuo (homogénea) con distribución estacionaria π . (es decir, si denotamos $p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t) = i | X(0) = j)$ entonces $\forall t \geq 0 \ P^T(t)\pi = \pi$). Sea $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ proceso de Poisson independiente de X_t , y de intensidad λ . Suponga que tomamos muestras de la cadena X en los instantes donde se producen los saltos de N , es decir consideramos el conjunto de v.a. $Y_n = X(T_n)$ donde T_n es el momento del n -ésimo salto de N .

- a) Demuestre que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es cadena de Markov
- b) Calcule las probabilidades de transición asociadas a $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- c) Demuestre que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene la misma distribución estacionaria π

P2. Paseos aleatorios a tiempo continuo

Considere $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ el paseo aleatorio simple en $\mathbb{Z}$ a tiempo continuo, es decir

$$\mathbb{P}(X(t+h) = i+1 | X(t) = i) = \mathbb{P}(X(t+h) = i-1 | X(t) = i) = \frac{\lambda h}{2} + o(h)$$

. Deseamos encontrar la distribución del tiempo T usado en una excursión desde el origen. Para esto seguiremos el siguiente esquema

- a) Demuestre que la cadena es recurrente
- b) Denotemos $\alpha = \frac{1}{2|m|}$ con $m \in \mathbb{Z}$. Demuestre que la probabilidad de que en una excursión se pase al menos una vez por el punto m es α . Más generalmente, si N es la cantidad de veces que se visita a m durante la excursión, demuestre que $\forall k \geq 1 \ \mathbb{P}(N \geq k) = \alpha(1-\alpha)^{k-1}$
- c) Demuestre que $\mathbb{E}(e^{\theta T}) = (1-\alpha) + \alpha \frac{\alpha \lambda}{\alpha \lambda - \theta}$
- d) Concluya

P3. Procesos de nacimiento y muerte

Considere el proceso de nacimiento y muerte lineal, i.e $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$. Denotemos $\nu(t) = \mathbb{P}(X(t) = 0 | X(0) = 1)$

- a) Demuestre que $\nu(t)$ satisface la EDO

$$\nu'(t) + (\lambda + \mu)\nu(t) = \mu + \lambda \Psi(t), \quad \nu(0) = 0 \quad \Psi(t) = \mathbb{P}(X(t) = 0 | X(0) = 2)$$

- b) Considere los procesos de nacimiento y muerte lineal independientes $(X_1(t))_{t \in \mathbb{R}^+}, (X_2(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ con $X_1(0) = X_2(0) = 1$. Demuestre que $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ definido por $Z(t) = X_1(t) + X_2(t)$ es un proceso de nacimiento y muerte lineal con $Z(0) = 2$
- c) Concluya que $\Psi(t) = \nu(t)^2$
- d) Calcule $\nu(t)$ para distintos valores de μ, λ

P4. Ramificación con Inmigración.

Sea $(\xi_{k,n} : k, n \geq 1)$ una familia de variables i.i.d. a valores en $\mathbb{N}_+ = \{0, 1, \dots\}$ cuya ley está dada por

$$\mathbb{P}(\xi_{k,n} = l) = p_l, \quad l \in \mathbb{N}_+ = \{0, 1, \dots\}.$$

La variable $\xi_{k,n}$ representará la descendencia del individuo k presente en el tiempo $n \geq 1$.

Sea $(X_n : n \geq 1)$ una secuencia de variables aleatorias i.i.d. a valores en $\mathbb{N}_+$ e independiente de $(\xi_{k,n} : k, n \geq 1)$. La variable X_n representará la inmigración en el tiempo $n \geq 1$.

Considere un proceso a tiempo discreto $Z = (Z_n : n \geq 0)$ a valores en $\mathbb{N}_+$, y llamado de "Ramificación con inmigración", que verifica

$$Z_0 = 1; \quad Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} \xi_{k,n} + X_n \quad n \geq 1.$$

a) Pruebe que $Z = (Z_n : n \geq 0)$ verifica la propiedad de Markov.

b) Sea G la función generadora de $\xi_{1,1}$ y H la función generadora de X_1 . Definamos G_n la función generadora de Z_n .

Muestre que $G_{n+1}(s) = G_n(G(s))H(s)$.

Recuerdo: la función generadora de la variable aleatoria Y tomando valores en $\mathbb{N}_+$ es $\sum_{l \geq 0} \mathbb{P}(Y = l) s^l$.

c) Deduzca el valor de $\mathbb{E}(Z_n)$ en términos de $\mu = \mathbb{E}(\xi_{1,1})$ y $\nu = \mathbb{E}(X_1)$.

P5. Sea $P(t) = (p_{ij}(t) : t \geq 0, i, j \in I)$ semigrupo **Markoviano** standard **uniforme**, luego su generador $Q = (q_{ij} = p'_{ij}(0^+) : i, j \in I)$ es **conservativo**. Diremos que la medida de probabilidad $\pi = (\pi_i : i \in I)$ es una distribución estacionaria si verifica

$$\pi' P(t) = \pi'$$

dónde π' es un vector fila.

Además, diremos que $P(t)$ es irreducible si $\forall i, j \in I$ existe $t > 0$ tal que $p_{ij}(t) > 0$.

Recuerdo: En el caso uniforme se tiene

$$P(t) = e^{Qt} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n Q^n}{n!}$$

a) Muestre que π es estacionaria si y sólo si $\pi' Q = 0$.

b) Demuestre que si $P(t)$ es irreducible entonces se verifica la siguiente propiedad:

$$\forall i, j \in I \exists n \geq 0, k_1, \dots, k_n \in I \text{ tal que } q_{k_0, k_1} > 0, q_{k_2, k_3} > 0, \dots, q_{k_n, k_{n+1}} > 0$$

donde $k_0 = i, k_{n+1} = j$

- c) Muestre que en el caso en que I es finito y $P(t)$ es irreducible entonces siempre existe la distribución estacionaria π y ésta es única.

Hint: Sea $q > \sup\{-q_{ii} : i \in I\}$. Pruebe que $\hat{Q} = \frac{1}{q}Q + \mathbf{I}$ es matriz estocástica irreducible finita ($\mathbf{I}$ matriz identidad).

Puede usar las partes anteriores.

En las partes (d) y (v) nos colocaremos en caso de dos estados $I = \{0, 1\}$, $q_0 > 0$, $q_1 > 0$ y se cumple $q_0 \neq q_1$ (Además, recuerde que el semigrupo es conservativo).

- d) En este caso:

Calcule en este caso la distribución estacionaria $\pi = (\pi_0, \pi_1)$;

Escriba las ecuaciones forward del semigrupo Markoviano y muestre que $p_{ij}(t) \rightarrow \pi_j$ cuando $t \rightarrow \infty$ (i.e., la distribución límite es la distribución estacionaria).

- e) Sean S, S' dos variables aleatorias independientes con $S \sim \exp[q_0]$, $S' \sim \exp[q_1]$. Calcule la distribución F de $S + S'$, o equivalentemente encuentre $1 - F(t) = \mathbb{P}(S + S' > t)$. Enseguida suponga que $(X_n : n \geq 1)$ son i.i.d. tal que $X_i \sim F$ y considere el proceso de renovación asociado a $(X_n)_{n \geq 1}$. Denote por F^* la distribución asintótica de la vida residual. Pruebe que $1 - F^*(u) = \frac{1}{q_0^2 - q_1^2} (q_0^2 e^{-q_1 u} - q_1^2 e^{-q_0 u})$.

- f) Considere la cadena de Markov $(N_t : t \geq 0)$ a valores en $I = \{0, 1\}$ definida por el semigrupo de (iv). Además suponga que ella parte de la distribución estacionaria $\pi = (\pi_0, \pi_1)$, es decir $N_0 \sim \pi$. Defina el tiempo aleatorio siguiente

$$\tau^* = \inf\{t > T_0 : N_t = 0\},$$

donde T_0 es el tiempo de estadía en el estado inicial. Pruebe que $\tau^* \sim F^*$, donde F^* está dado por (v).

(Se tiene que τ^* es el tiempo en que entra a 0 si la cadena parte del estado 1, y es el tiempo en que vuelve a entrar a 0 después de pasar por 1, si es que la cadena parte del estado 0.)

Nota. La igualdad $\tau^* \sim F^*$ traduce el hecho que la distribución del proceso N_t es invariante en el tiempo (pues su distribución inicial es la estacionaria π), luego el proceso de renovación asociado está en equilibrio.

P6. Sea $(N_t : t \geq 0)$ un proceso de Poisson, y defina

$$X_t = (-1)^{N_t}$$

- a) Pruebe que $(X_t : t \geq 0)$ es una cadena de Markov a tiempo continuo.
- b) Calcule el semigrupo de transición y el generador infinitesimal asociados a X .