Tarea 2: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez

Profesores Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

Fecha de entrega: Durante Control 2

Pregunta 1

1a. Sean $(N_1(t) : t \geq 0)$, $(N_2(t) : t \geq 0)$ dos procesos de Poisson independientes, de parámetros λ_1, λ_2 . Demuestre que $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ es un proceso de Poisson de parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$ (en particular, es un proceso de renovación).

1b. Sean $(N_1(t) : t \geq 0)$, $(N_2(t) : t \geq 0)$ dos procesos de renovación independientes, con la misma distribución F (no aritmética) y media $\mu < \infty$. Supongamos $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ es un proceso de renovación. Demuestre que N_1, N_2, N son procesos de Poisson

1c. Sea $(N_1(t) : t \geq 0)$ proceso de Poisson de parámetro λ_1 y $(N_2(t) : t \geq 0)$ un proceso de renovación independiente de N_1 , con distribución G y media $\mu < \infty$. Demuestre que si $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ es un proceso de renovación entonces N_2 es un proceso de Poisson.

Pregunta 2. Sea $(N(t) : t \geq 0)$ un proceso de Poisson de parámetro λ .

2a. Probar que para $s \in (0, t)$ fijo se cumple:

$$\mathbb{P}(N(s) = k | N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

(es decir: dado $N(t)$ se tiene $N(s) \sim \text{Binomial}(N(t), \frac{s}{t})$).

2b. Pruebe que $M(t) = N(t) - \lambda t$ es una martingala, i.e., que $\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(M(t) | M(s)) = M(s)$.

Pregunta 3. Sea F concentrada en $\mathbb{R}_+$, no-aritmética y tal que su media es finita, es decir $\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$. Considere el proceso de renovación asociado $(N(t) : t \geq 0)$ y sea $m(t) = \mathbb{E}(N(t))$. Asuma que F tiene segundo momento finito, luego $\sigma^2 < \infty$ donde $\sigma^2 = \int_0^\infty (x - \mu)^2 dF(x)$.

El objetivo de este problema es mostrar la igualdad siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(m(t) - \frac{t}{\mu} \right) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}. \quad (1)$$

Para ello siga el camino siguiente:

3a. Pruebe que

$$\mathbb{E}(S_{N(t)+1} - t) = \mu m(t) - t + \mu.$$

Hint: Puede usar Wald.

3b. Pruebe que $H(t) = \mu m(t) - t + \mu$ verifica:

$$H(t) = a(t) + \int_0^t a(t-z) dm(z) \text{ con } a(t) = \int_t^\infty (x-t) dF(x).$$

3c. Concluya la fórmula (1).

Pregunta 4. Sea $(N_t : t \geq 0)$ un proceso de renovación, con tiempos entre renovaciones dados por las variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, de media $\mu < \infty$. Supongamos además que tenemos otra familia de variables aleatorias i.i.d. $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, tal que, $\forall i, Y_i \leq X_i$ c.s., y además Y_i es independiente de $(X_j)_{j \neq i} \forall i$. Denote por G la

distribución de Y_1 , y por ν su media (que suponemos finita).

La idea es que Y_i representa una fracción de X_i . Definimos entonces, $\forall t$, la variable aleatoria

$$W_t = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists i \text{ tal que } t \in [S_i, S_i + Y_{i+1}] \\ 0 & \sim \end{cases}$$

i.e., $W_t = 1 \Leftrightarrow t$ está cubierto por algún Y . Defina $q(t) = \mathbb{P}(W_t = 1)$.

Pruebe que $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \frac{\nu}{\mu}$ (i.e., asintóticamente, una fracción ν/μ del tiempo es cubierto por los Y_i).

Hint: Plantee una ecuación tipo renovación para q .

Pregunta 5

5a. Sea $L > 0$ una cantidad fija. Sea $\lambda > 0$. Sea $(X_n : n \geq 0)$ una sucesión de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas según una exponencial de media $1/\lambda$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$, y considere $N_t = \sup\{n : S_n \leq t\}$ el proceso de renovación asociado que en este caso es un proceso de Poisson de tasa λ .

Considere la sucesión (aleatoria) dada por:

$$T_1 = S_1, \quad T_{k+1} = \inf\{S_n : S_n \geq T_k + L\}$$

Pruebe que $(T_k : k \geq 1)$ son los instantes de renovación de un proceso de renovación generalizado dado por una secuencia de variables aleatorias independientes $(Y_n : n \geq 1)$. Calcule la ley de Y_1 y calcule la ley (común) de Y_i para $i \geq 2$.

5b. Sea $(N_t : t \geq 0)$ un proceso de renovación cuyos instantes de renovación son dados por $(S_n : n \geq 1)$. Sea F^{*n} la distribución de S_n .

Sea $p \in (0, 1)$ y defina $q = 1 - p$. Considere $(Z_n : n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes distribuidas según una Bernoulli(p), es decir $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(Z_n = 0) = q$.

Suponga que cada instante de renovación es guardado con probabilidad p , es decir considere el siguiente proceso

$$M_t = \text{cardinal}(A_n) \text{ donde } A_n = \{n \geq 1 : S_n \leq t/p, Z_n = 1\}.$$

Pruebe que $(M_t : t \geq 0)$ es un proceso de renovación, generado por una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas según una distribución F_p dada por

$$F_p(x) = \sum_{r \geq 1} p q^{r-1} F^{*r} \left(\frac{x}{p} \right),$$

es decir si $(Y_j : j \geq 1)$ son i.i.d. con $Y_j \sim F_p$ entonces el proceso de renovación asociado se distribuye como $(M_t : t \geq 0)$.