Clase Auxiliar n° 10:Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

11 de junio del 2010

P1. *a*) Denotemos para una distribución G en $\mathbb{R}_+$ $m_k(G) = \int_0^\infty x^k dG(x)$ su $k-$ésimo momento. Sea F función de distribución en $\mathbb{R}_+$ con $m_k(F) < \infty$ para cierto $k > 1$. Sea $H(x) = \int_0^x \bar{F}(t)dt$. Pruebe que

$$m_k(H) = \frac{m_{k+1}(F)}{(k+1)}\,.$$

b) Muestre que si $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ son medibles, $0 < A < 1$ y F, G, son funciones de distribución con $F(0^-) = G(0^-) = 0$ y

$$F(s) = A + \int_0^s g(t)dG(t) \quad \text{si } \ s \geq 0$$

entonces

$$\int_0^t f(s)dF(s) = Af(0) + \int_0^t g(s)f(s)dG(s) \quad \text{si } \ t \geq 0$$

P2. Considere un proceso de renovación $N(t)$ dado por una sucesión $(X_n : n \geq 1)$ con $X_n \sim F$ con $F(0^-) = 0$, $F(0) < 1$. Supondremos que en el instante de cada renovación S_n se recibe una recompensa R_n, para $n \geq 1$. Suponga que $(R_n : n \geq 1)$ son i.i.d. Defina la v.a.

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i\,.$$

que es la recompensa total recibida hasta t. Notemos $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, $\nu = \mathbb{E}(R_1)$.

Suponga $\mu, \nu < \infty$

a) Muestre que

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{R}(t)\right) = (m(t)+1)\nu - \mathbb{E}(R_{N(t)+1})$$

b) Pruebe que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{R}(t)}{t} = \frac{\nu}{\mu} \quad \mathbb{P} - c.s.$$

Indicación: Recuerde el teorema fuerte de los grandes números: Si $(Y_n : n \geq 1)$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d, con $\mathbb{E}(Y_n) < \infty$ entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_n}{n} \to \mu \quad \mathbb{P} - c.s.$$

P3. Sea $N(t)$ proceso de renovación (igual que en el **P1**). Supongamos que $\mu := \mathbb{E}(X_1) < \infty, \sigma^2 := \mathbb{V}ar(X_1) < \infty$. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{u^3}}} < y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{\frac{-x^2}{2}} dx \quad \text{si } t \to \infty$$

Indicación: Recuerde el teorema central del límite y que si $c_n \to c$ como números reales y si $X_n \to X$ en distribución entonces $c_n X_n \to cX$ en distribución

P4. Procesos de renovación alternantes

Considere un sistema que puede estar en dos estados, on(0) y off(1). Inicialmente está en 0 y permanece en ese estado por un tiempo Z_1, a partir de ese momento pasa al estado 1 y permanece en ese estado durante un tiempo Y_1. Luego permanece en el estado 0 por un tiempo Z_2 y así sucesivamente. Suponemos que los vectores $(Z_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son i.i.d. Permitimos sin embargo que haya dependencia entre Z_n e Y_n. Supongamos $Z_n \sim H$, $Y_n \sim G$, $X_n := Z_n + Y_n \sim F$. Suponemos además que F es no aritmética y que Y_n, Z_n son integrables. Sea W_t la v.a. que dice en qué estado se encuentra el sistema en el instante t y $p(t) = \mathbb{P}(W_t = 0)$

a) Demuestre que $p(t) = \bar{H}(t) + \int_0^t p(t-y)dF(y)$ y por lo tanto $p(t) = \bar{H}(t) + \int_0^t \bar{H}(t-y)dm(y)$

b) Concluya que $\lim_{t\to\infty} p(t) = \dfrac{\mathbb{E}(Z_n)}{\mathbb{E}(Z_n) + \mathbb{E}(Y_n)}$