Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #12 Procesos de Markov

Markov Contínuo

Profesor: Servet Martinez.

Auxiliares: Gonzalo Contador, Gonzalo Mena.

P1. Sean $\lambda, \mu > 0$. Considere la matriz Q dada por

$$-q_{11} = \mu = q_{12}$$

$$-q_{22} = \lambda = q_{21}$$

Considere el semigrupo Markoviano en los estados 1 y 2, el cual al ser finito verifica $P(t) = e^{-Qt}$.

a) Pruebe que

$$p_{11}(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t})$$

$$p_{22}(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t})$$

b) Considere ahora la matriz estocástica R definida por

$$r_{11} = r_{22} = \alpha$$

$$r_{21} = r_{12} = 1 - \alpha$$

Pruebe que existe un semigrupo Markoviano $(P(t))_{t>0}$ tal que $P(1) = R$ si y sólo si $\alpha > \frac{1}{2}$

P2. Sea $(N(t))_{t>0}$ proceso de nacimiento puro con tasas de nacimiento $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Notamos por $S_n = inf\{t > 0 : N(t) = n\}$, con lo que se obtiene que $T_i = S_{i+1} - S_i$ son exponenciales independientes de parámetro λ_i.
Supongamos $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$

a) Considere la transformada de Laplace de p_n definida por $\hat{p_n}(\theta) = \int\limits_0^\infty e^{-t\theta} p_n(t)dt$.
Pruebe que

$$\hat{p_n}(\theta) = \frac{1}{\lambda_n}\prod_{i=0}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\theta}$$

b) Pruebe que la densidad de probabilidad de S_n está dada por $\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)$

c) Defina $a_j = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j}$. Pruebe que

$$\hat{p_n}(\theta) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i \lambda_i}{\lambda_i + \theta}$$

d) Deduzca la fórmula para las probabilidades de nacimientos a tiempo t

$$p_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$