Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #9 Procesos de Markov

Procesos de Renovación y Poisson

Profesor: Servet Martinez.

Auxiliares: Gonzalo Contador, Gonzalo Mena.

P1. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Definimos el proceso de renovación asociado

$$S_0 = 0$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

a) Considere $\{N(t)\}_{t>0}$ el proceso de conteo asociado a los instantes de renovación. Pruebe que la función de densidad de los instantes de renovación verifica $f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ y concluya que $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$. El proceso de conteo recién construido se conoce como **Proceso de Poisson de tasa λ.**

b) Pruebe que el proceso de Poisson verifica $\forall s, t > 0$ $N(t+s) - N(t)$ es independiente de $N(t)$. Esta propiedad se conoce como **incrementos independientes.**

c) Considere ahora un proceso de conteo verificando las siguientes propiedades:

i) $\{N(t)\}_{t>0}$ es a incrementos independientes y estacionarios.

ii) Para algún $\lambda > 0$ se cumple $\mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$; $\mathbb{P}(N(h) > 1) = o(h)$

Pruebe que.$\{N(t)\}_{t>0}$ es un proceso de Poisson de tasa λ.

P2. Considere $\{N(t)\}_{t>0}$ un proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$. Pruebe que, condicionando al evento $\{N(t) = n\}$ la densidad conjunta de los instantes de renovación S_i corresponde a la densidad conjunta de n variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en el intervalo $(0, t)$

P3. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proceso de renovación con distribución no aritmética. Defina $Y(t) := S_{N(t)+1} - t$ la vida residual en el tiempo t. Supondremos $X_n \in L^2(\mathbb{P})$, con $\mathbb{E}(X_n) = \mu$.

a) Muestre que la media de la vida residual asintótica es $\underset{t\longrightarrow\infty}{lim}\mathbb{E}(Y(t)) = \dfrac{\mathbb{E}(X_n^2)}{2\mu}$

b) Concluya que $\underset{t\longrightarrow\infty}{lim} m(t) - \frac{t}{\mu} = \dfrac{\mathbb{E}(X_n^2)}{2\mu^2} - 1$

P4. Sea $\{N(h)\}_{h>0}$ un proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$ y considere $0 < s < t$

a) Muestre que, condicionando respecto a $N(t)$, se tiene $N(s) \sim Binomial(N(t), \frac{s}{t})$
b) Defina $M(t) = N(t) - \lambda t$. Pruebe que $\{M(h)\}_{h>0}$ es una martingala, esto es, $\mathbb{E}(M(t)|M(s)) = M(s)$.