Clase Auxiliar n° 8:Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

28 de mayo del 2010

El objetivo de esa auxiliar es estudiar bajo qué condiciones una función de una cadena de Markov es una cadena de Markov. Partamos con un caso sencillo. Consideramos el espacio de probabilidades filtrado $(\Omega, \{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}, \mathbb{P})$. (filtración natural).

P1. Sea X_n cadena de Markov a valores en I(numerable) con matriz de transición P y distribución inicial μ. Sea $\Psi : I \to E$ biyectiva. Demuestre que $Y_n = \Psi(X_n)$ es cadena de Markov, encuentre su matriz de transición y distribución inicial.
Sin embargo, si Ψ no es biyectiva lo anterior deja de ser cierto. A continuación veremos un contrajemplo.

P2. Sea $I = \{a, b, c\}, E = \{0, 1\}$, considere la cadena dada por la matriz $P_{a,b} = P_{c,b} = 1, P_{b,a} = P_{b,c} = \frac{1}{2}, P_{a,c} = P_{c,a} = 0$ y $\Psi(a) = 0, \Psi(b) = \Psi(c) = 1$. Demuestre que

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0|Y_n = 1, Y_{n-1} = 0) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0|Y_n = 1) = \frac{1}{2}\frac{\mathbb{P}(X_n = b)}{\mathbb{P}(X_n = b) + \mathbb{P}(X_n = c)}$$

y que por tanto Y_n no puede ser cadena de Markov.

A continuación veremos un útil criterio que debilita la hipótesis de invertibilidad de Ψ demostrará el criterio de Dynkin:

P3. Supongamos Ψ es sobreyectiva, y que se cumple la siguiente condición

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in \Psi^{-1}\{i\}), |X_n = x_1) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in \Psi^{-1}\{i\}), |X_n = x_2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2 \in I \text{ tq } \Psi(x_1) = \Psi(x_2)$$

o equivalentemente

$$\sum_{y\in\Psi^{-1}\{i\}} P_{x_1,y} = \sum_{y\in\Psi^{-1}\{i\}} P_{x_2,y} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2 \in I \text{ tq } \Psi(x_1) = \Psi(x_2)$$

1. Demuestre que $Q(i,j) := \sum_{y\in\Psi^{-1}\{j\}} P_{x,y}$ (para cualquier x que verifica $\Psi(x) = i$) está bien definida y es matriz estocástica, tal que Y_n es proceso de Markov con matriz de transición Q.Para lo último pruebe primero que para cualquier $A \in \sigma(X_0 \dots X_{n-1})$ y cualquier $x \in I$, si definimos $C^x = \{y \in I : \ \Psi(y) = \Psi(x)\}$ entonces

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in \Psi^{-1}\{i\}), |X_n \in C^x, A) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in \Psi^{-1}\{i\}), |X_n = x, A)$$

2. Muestre que si π es un vector invariante asociado a la cadena X_n entonces $\widetilde{\pi} = \pi \circ \Psi^{-1}$ definido como $\widetilde{\pi}(i) = \sum_{y\in\Psi^{-1}\{i\}} \pi(y)$ es distribución estacionaria asociada a la cadena Y_n

Por último veamos una aplicación una aplicación del resultado anterior.
P4. Consideramos primero el paseo en los vértices del hipercubo m dimensional, es decir, $I = \{0,1\}^m$

$$P_{x,y} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } y = x^{(i)} \text{ para } i \in \{1 \ldots m\} \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad \text{con } x^{(i)} = x \text{ salvo en la coordenada i}$$

Es decir, en cada paso se está en un vértice y se va hacia alguno de los vecinos con probabilidad $\frac{1}{m}$.

1. Note que la probabilidad estacionaria de esta cadena es la uniforme (¿por qué?).

2. Recordemos el modelo de de Ehrenfest corresponde a la cadena con matriz de transición (en $I = \{0 \ldots m\}$ dada por

$$Q_{i,j} = \begin{cases} \frac{i}{m} & \text{si } j = i+1 \\ \frac{m-i}{m} & \text{si } j = i-1 \end{cases} \text{con } Q_{m,m} = Q_{0,0} = 0, Q_{0,1} = Q_{m,m-1} = 1$$

   Utilice el criterio de Dynkin para probar que la probabilidad estacionaria es la binomial $(m, \frac{1}{2})$