Clase Auxiliar N°6: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

7 de mayo del 2010

P1. Algunas propiedades generales

a) Sea X_n cadena de Markov irreducible, y se P su matriz de transición. Suponga que P es idempotente, es decir $P^2 = P$. Pruebe que la cadena es aperiódica, recurrente positiva y $\forall i, j \in I \quad P_{i,j} = P_{j,j}$

b) Sea I finito. Decimos que P es bi-estocástica si $\forall j \in I \sum_{i \in I} P_{ij} = 1$. Pruebe que en tal caso la medida uniforme es invariante.

c) Sea I numerable. Decimos que μ es reversible si $\mu_i P_{ij} = \mu_j P_{ji}$. Pruebe que si μ es reversible entonces es estacionaria.

P2. El modelo de Ehrenfest de difusión de un gas: m bolas numeradas están distribuidas en dos cajas. El estado X_n del sistema corresponde a la cantidad de bolas que están en la primera caja, entonces $I = \{0 \ldots m\}$ En cada paso un número entre 0 y m es escogido al azar (y de manera uniforme) y la bola correspondiente a dicho número es cambiada de caja. Determine la matriz de transición P de la cadena. ¿Es irreducible? ¿es aperiódica? ¿es recurrente?. Encuentre la distribución estacionaria.

P3. Paseo aleatorio en un grafo Sea $G = (E, A)$ un grafo finito, donde E denota el conjunto de vértices y A el conjunto de aristas. En E consideramos la matriz de transición

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d(i)} & \text{si } ij \in A \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

. Donde $d(i)$ es la cantidad de arcos que llegan a i.

a) Muestre que si el grafo es conexo entonces P es irreducible

b) Muestre que si $d = \sum_{i \in E} d(i)$ entonces el vector $\pi_i = \frac{d(i)}{d}$ es una distribución estacionaria para la cadena.

P4. Considere una pulga (o piojo) confinada a saltar en un triángulo: En cada paso puede moverse a favor de las manecillas del reloj con probabilidad p y en contra de las manecillas del reloj con probabilidad $1 - p$.

a) Muestre que la cadena que representa el vértice en el que se encuentra la pulga es irreducible y aperiódica.

b) Calcule la medida invariante

c) Para cada distribución inicial μ calcule $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_\mu(X_n = 1, X_{n+1} = 2)$, $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_\mu(X_n = 2, X_{n+1} = 1)$

d) ¿Para qué valores de p se cumple que la distribución invariante π es reversible?