Clase Auxiliar N°2: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

9 de abril del 2010

P1. Algunos ejemplos de Cadenas de Markov

a) Paseo aleatorio
Sean $(X_n)_{n\geq 0}$ v.a.'s i.i.d con $\mathbb{P}(X_i = j) = a_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Demuestre que $(S_n)_{n\geq 0}$ definido por

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

es una cadena de Markov con matriz de transición $P_{i,j} = a_{j-i}$.

b) Valores record
Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.'s i.i.d tal que $\mathbb{P}(X_i = j) = \alpha_j$, $j \geq 0$. Diremos que un record ocurre en el tiempo n si $X_n \geq \max(X_1, ..., X_{n-1})$, donde $X_0 = -\infty$, y si un record ocurre en el tiempo n llamamos X_n el valor record. Denotemos por R_i al $i-$ésimo valor record. Demuestre que $(R_i)_{i\geq 0}$ es una cadena de Markov y calcule su matriz de transición.

c) Demuestre que no necesariamente que $\mathbb{P}(X_{n+1} = j_{n+1}|X_n \in J_l, l \in \{0 \dots n\}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j_{n+1}|X_n \in J_n)$ si $|J_n| > 1$

P2. Tiempos de parada y operador shift
Sea I numerable y sean para todo $n \in \mathbb{N}$ $X_n : I^{\mathbb{N}} \to I$ las proyecciones canónicas. Consideramos el espacio medible canónico , es decir $\left(I^{\mathbb{N}}, \sigma(X_k, k \geq 0)\right)$. Sean S, T tiempos de parada con respecto a $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, 0 \leq k \leq n)$

a) Muestre que para cualquier entero positivo k, $k + T \circ \theta_k$ es tiempo de parada

b) Muestre que $\rho = S + T \circ \theta_S$ es tiempo de parada (con la convención $\rho = \infty$ si $S = \infty$). Muestre además que si S, T son finitos, $X_T \circ \theta_S = X_\rho$

c) Para $A \subseteq I$ definimos $T_A(\omega) = \text{ínf}\{n \geq 0\ X_n(w) \in A\}$, $S_A(\omega) = \text{ínf}\{n \geq 1\ X_n(w) \in A\}$, que son tiempos de parada. Sea υ otro tiempo de parada. Demuestre que

$$\upsilon + T_A \circ \theta_\upsilon = inf\{n \geq \upsilon\ X_n \in A\}$$

$$\upsilon + S_A \circ \theta_\upsilon = inf\{n > \upsilon\ X_n \in A\}$$

y que si $A \subseteq B$ entonces $T_A = T_B + T_A \circ \theta_{T_B}$

P3. Martingalas y Cadenas de Markov
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Sea $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{F}$ una sucesión creciente de $\sigma-$álgebras.

Definición. *Decimos que la familia $(X_n)_{n\geq 0}$ de v.a.'s a valores reales es una martingala si*

- X_n *es* F_n *medible y* $X_n \in L^1$
- $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$

Notemos que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Definamos $Pf(i) := \sum_{j\in I} P_{ij} f(j)$. Demuestre que $Pf(i) = \mathbb{E}_i(f(X_1))$

b) Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ secuencia de variables aleatorias en I numerable. Sea P matriz estocástica. Demuestre que $(X_n)_{n\geq 0}$ es cadena de Markov con matriz de transición P si y sólo si $\forall\ f : I \to \mathbb{R}$ medible y acotada

$$f(X_n) - f(X_0) - \sum_{j=0}^{n-1}(P - I)f(X_j)$$

es martingala con respecto a la familia $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0...X_n)$

c) Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ martingala y T tiempo de parada. Demuestre que $(X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ es martingala.

d) Supongamos que $T < \infty$ c.s. Supongamos además que $|X_{T\wedge n}| < C$ para cierto $C > 0$, y para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera. Demuestre que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$

e) (Ruina del jugador) Consideremos el paseo aleatorio $X_0 = 0$, $X_n = Y_1 + ..Y_n$ con Y_i i.i.d y $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ calcule la probabilidad de que $(X_n)_{n\geq 0}$ alcance $-a$ antes que b